



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : Mécanique

**École Doctorale de Sciences Mécaniques, Acoustique, Électronique et Robotique de Paris
(ED 391)**

Présentée par :

Clara ISSANCHOU

Pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

**Vibrations non linéaires de cordes avec contact unilatéral.
Application aux instruments de musique.**

Soutenue le 25 septembre 2017 devant le jury composé de :

José Antunes	Principal Researcher, C2TN, Bobadela	Rapporteur
Claude-Henri Lamarque	Professeur, ENTPE, Vaulx-en-Velin	Rapporteur
Patrick Ballard	Directeur de Recherche CNRS, UPMC, Paris	Examineur
Vincent Acary	Chargé de Recherche HDR, INRIA, Saint-Ismier	Examineur
Alexandre Charles	Ingénieur de Recherche, SAFRAN, Paris	Examineur
Jean-Loïc Le Carrou	Maître de Conférences HDR, UPMC, Paris	Co-directeur de thèse
Cyril Touzé	Professeur, ENSTA ParisTech, Palaiseau	Co-directeur de thèse
Benoît Fabre	Professeur, UPMC, Paris	Directeur de thèse
Olivier Doaré	Professeur, ENSTA ParisTech, Palaiseau	Co-directeur de thèse, invité
Stefan Bilbao	Professeur, University of Edinburgh, Edinburgh	Invité

Remerciements

Les travaux exposés dans le présent document sont le fruit de collaborations et d'échanges divers qui en ont peu à peu enrichi la teneur. Je souhaite en remercier les acteurs, quel qu'ait été leur rôle au cours de ces trois années.

Je remercie les rapporteurs de cette thèse pour leur lecture attentive et tous les membres du jury pour leur implication et l'éclairage qu'ils ont apporté.

Je souhaite remercier tout particulièrement mes directeurs de thèse, Jean-Loïc Le Carrou, Cyril Touzé, Olivier Doaré et Benoît Fabre, grâce à qui et avec qui j'ai pu mener des travaux alliant mécanique, études numériques, protocoles expérimentaux et instruments de musique.

Je leur suis reconnaissante de m'avoir permis de rencontrer notamment Stefan Bilbao de l'université d'Édimbourg, Vincent Acary et Franck Pérignon de l'INRIA de Grenoble, Patrick Joly de l'INRIA de Saclay, Philippe Bruguière et Sandie Leconte du Musée de la Musique de Paris, ainsi que le luthier Yann-David Esmans. Autant d'acteurs que je remercie d'avoir accepté de partager leur temps et leur expertise, et qui ont ainsi contribué aux travaux présentés dans ce document.

Je remercie également les membres de l'institut *∂*Alembert d'une part, en particulier l'équipe LAM, et de l'IMSIA d'autre part, pour la convivialité qu'ils ont su apporter au quotidien et leur aide en diverses occasions. Merci notamment à Laurent Quartier, Pascal Le Saëc, Jean-Marc Fontaine, Benoît Navarret et René Durand pour leur aide sur le plan technique, et à Catherine Fourcin, Simona Otarasanu, Olivier Labbey, Évelyne Mignon, Charlotte Vallin et Caroline Foubert pour leur accompagnement sur les aspects administratifs. Je remercie Augustin Ernoult, Camille Vauthrin, Alexandre Roy, Arthur Givois, Antoine Briard, Barend Bentvelsen et Thomas Lacour d'avoir rendu chaleureux les bureaux que j'ai occupés. Je souhaite également remercier Romain Murgat, Hugo Caracalla, Jean-Théo Jiolat, Lou Seropian, Daniel Bedoya et Nadège Botovolasa avec qui j'ai eu le plaisir de travailler à l'occasion d'un stage et de projets.

Je remercie enfin chaleureusement toutes les personnes ayant contribué, d'une manière ou d'une autre, au déroulement de cette thèse.

Table des matières

Remerciements	iii
I Introduction	1
1 Contexte et positionnement de la thèse	3
1.1 Contexte et état de l'art	3
1.2 Objectif	7
1.3 Organisation du manuscrit	8
II Modèles et méthodes numériques	9
2 Modèles	11
2.1 La corde vibrante	11
2.1.1 Description linéaire de la corde	11
2.1.2 Approche modale	13
2.1.2.1 Description modale de la corde vibrante	13
2.1.2.2 Justification du choix d'une approche modale	14
2.1.2.3 Équation de la corde amortie	15
2.1.2.4 Couplage aux extrémités et fréquences propres	15
2.1.2.5 Amortissement : frottement dans l'air et pertes internes	16
2.1.2.6 Conditions initiales	17
2.2 Comment modéliser les contacts corde/obstacle?	17
2.2.1 Force de contact régularisée	19
2.2.2 Force de contact non régulière	20
2.2.2.1 Premières définitions et propriétés	20
2.2.2.2 Modèle non régulier pour le contact corde/obstacle	22
2.2.2.3 Écriture à l'aide de mesures différentielles	23
2.3 Comment modéliser les frottements corde/obstacle?	24
2.3.1 Force de frottement régularisée	24
2.3.2 Force de frottement non régulière	25
2.4 Un cas idéal avec solution analytique	25
2.5 Conclusion	27
3 Méthodes numériques	29
3.1 Traitement de la partie linéaire	29
3.1.1 Oscillateur en vibration libre	30
3.1.2 Ordre du schéma avec forçage	31
3.1.3 Extension à N_m degrés de liberté	33
3.2 Méthodes régularisantes	34
3.2.1 Méthode mixte	34
3.2.1.1 Discrétisation spatiale	34
3.2.1.2 Discrétisation temporelle	35

3.2.1.3	Étude de stabilité	35
3.2.1.4	Prise en compte des deux polarisations transversales	38
3.2.1.5	Étude de convergence	38
3.2.1.6	Temps de calcul	41
3.2.1.7	Comparaison à la solution analytique	41
3.2.2	Schéma modal	44
3.2.2.1	Forme générale de schémas conservatifs	44
3.2.2.2	Cas $N = 1$	45
3.2.2.3	Cas $N = 2$	46
3.2.2.4	Cas N quelconque	48
3.2.2.5	Application : la corde avec contact, $N = 4$	49
3.2.2.6	Conclusion et intérêt	50
3.3	Schéma numérique non régulier	51
3.3.1	Discrétisation temporelle	51
3.3.2	Écriture sous forme de LCP et résolution	52
3.3.3	Énergie discrète	53
3.3.4	Prise en compte des deux polarisations transversales	54
3.3.5	Étude de convergence	54
3.3.6	Temps de calcul	56
3.3.7	Comparaison à la solution analytique	56
3.4	Mise en regard des méthodes régularisante et non régulière	59
3.5	Conclusion	60

III Comparaisons et applications 63

4 Contact entre une corde vibrante et un obstacle ponctuel : simulations et expériences 65

4.1	Protocole expérimental	65
4.1.1	Description du banc de mesure	65
4.1.2	Capteurs de déplacement	66
4.1.3	Excitation de la corde	68
4.1.4	Détection du contact	68
4.2	Identification des caractéristiques linéaires	69
4.3	Confrontation des signaux numériques et expérimentaux	70
4.3.1	Sans obstacle	70
4.3.2	Obstacle ponctuel centré, méthode mixte	72
4.3.2.1	Description temporelle et fréquentielle	72
4.3.2.2	Instants de contact	75
4.3.2.3	Mouvement 3D de la corde	76
4.3.3	Obstacle ponctuel centré, méthode non régulière	78
4.3.4	Obstacle ponctuel décentré, méthode mixte	80
4.3.5	Obstacle ponctuel décentré, méthode non régulière	82
4.4	Conclusion	84

5 Contact distribué : application à la basse électrique 85

5.1	Protocole expérimental	85
5.2	Identification des caractéristiques linéaires	87
5.3	Comparaison des simulations numériques et mesures sur la basse munie de frettes	90
5.3.1	Cas B : vibration avec contact sur 12 frettes	90
5.3.2	Cas C : vibration avec contact sur 20 frettes	95
5.3.3	Mouvement 3D de la corde	96
5.4	Étude paramétrique sur la basse munie de frettes	98
5.4.1	Dispersion de la corde	98

5.4.2	Un paramètre du musicien : l'influence du point de pincement	99
5.4.3	Un paramètre de réglage du luthier : le profil des frettes	100
5.4.4	Raideur du contact	102
5.5	Basse <i>fretless</i>	102
5.6	Conclusion	105
IV Conclusion et perspectives		107
V Annexes		117
A Quelques instruments de musique impliquant des contacts corde/obstacle		119
A.1	Les instruments à chevalet « plat » : contact corde/chevalet	119
A.1.1	Le sitar	121
A.1.2	La <i>vina</i>	122
A.1.3	La <i>tampoura</i>	123
A.1.4	Le <i>sarangi</i>	125
A.1.5	Guitare électrique	125
A.1.6	La <i>bagana</i> éthiopienne	127
A.2	Du manche aux harpions : les obstacles à la vibration de la corde, hors chevalet	127
A.2.1	La contrebasse	128
A.2.2	La guitare basse électrique	129
A.2.3	Le <i>shamisen</i>	130
A.2.4	Le <i>biwa</i>	130
A.2.5	La harpe gothique	131
B Résultats de périodicité de la littérature et extensions		133
B.1	Résultats de périodicité de la littérature	133
B.2	Extension des résultats au cas d'un pincement et d'un obstacle à une fraction entière de la longueur de la corde.	135
B.2.1	Pincement au milieu de la corde	135
B.2.2	Obstacle en $x_{obst} = 1/N$ et pincement en $x_p = p/N$	137
C Identités et inégalités pour l'analyse de stabilité		139
D Développement du schéma modal pour $N \in \{3, 4\}$		141
D.1	Cas $N = 3$	141
D.2	Cas $N = 4$	142
Bibliographie		145

Première partie

Introduction

Chapitre 1

Contexte et positionnement de la thèse

1.1 Contexte et état de l'art

Les instruments à cordes, aussi appelés cordophones (VON HORNBOSTEL et al., 1914), produisent des sons à partir de la vibration d'une ou plusieurs cordes. Cette vibration seule est difficilement audible ; elle est généralement transmise par un processus mécanique ou électro-acoustique pour être rayonnée de manière plus efficace, par exemple *via* une table d'harmonie. De nombreux éléments participent à la qualité des sons produits, dont le geste du musicien, la corde elle-même et les caractéristiques des éléments rayonnants. Des artifices acoustiques viennent éventuellement compléter ces éléments, et peuvent provoquer des contacts entre la corde vibrante et un obstacle. La plupart des instruments concernés par ce type de contact sont des instruments à cordes pincées. Les contacts apportent une dimension nouvelle au son, en renforçant sa présence ou en lui donnant un aspect percussif par exemple. Il s'agit en général d'un effet recherché par les luthiers et musiciens, faisant l'objet d'un réglage précis. Toutefois, dans certains cas, des contacts interviennent entre les cordes et des éléments des instruments sans que cela ne soit intentionnel ; il s'agit du phénomène de frise. Dans le cadre de cette thèse, nous limiterons le champ d'étude aux obstacles fixes. La diversité des instruments impliquant des contacts corde/obstacle est grande. Elle s'exprime à travers des éléments interférant avec la vibration des cordes de natures variées et s'étend sur une large partie du monde. Nous en donnons une illustration en Annexe A à travers la description d'un certain nombre de ces instruments. Afin de nourrir ce propos introductif et d'asseoir le positionnement de ce travail, nous détaillons ici deux exemples que nous reprendrons dans la suite du manuscrit, à savoir la *tampoura* et la basse électrique.

La figure 1.1 montre une *tampoura*, un instrument d'Asie du Sud utilisé pour instaurer une nappe sonore venant accompagner un chant ou un autre instrument. Un détail du chevalet d'une *tampoura* est présenté sur la figure 1.1(c). Il définit l'une des extrémités de la corde vibrante, l'autre étant définie par le sillet. Le chevalet a pour rôle de transmettre la vibration de la corde au corps de l'instrument, en particulier à la table d'harmonie. Ce principe de transmission peut s'observer sur de nombreux instruments tels que le violon ou la guitare acoustique. Sur la *tampoura* cependant, le chevalet a une certaine largeur ; il est dit « plat », bien qu'il soit en réalité courbe, et fait obstacle à la vibration de la corde. De plus, un fil, généralement en soie ou en coton, est placé entre ce chevalet plat et chacune des cordes. Ce dispositif doit être réglé avec soin, il est à l'origine du son si particulier de cet instrument (VALETTE et al., 1991). Ainsi, on ne saurait expliquer sa richesse spectrale sans prendre en compte le chevalet, qui fournit de l'énergie dans la zone sensible de l'oreille humaine et donne une présence renforcée à l'instrument, malgré une excitation douce des cordes.

Des contacts corde/obstacle peuvent également intervenir sur des instruments occidentaux tels que la basse électrique, présentée sur la figure 1.2. Cet instrument originaire des États-Unis est muni de quatre cordes, mises en vibration lorsque le musicien pince, ou éventuellement frappe la corde avec les doigts. Un mode de jeu particulièrement apprécié dans la musique populaire et en jazz notamment consiste à donner un aspect percussif au son en provoquant un contact entre les cordes et les frettes. Pour cela, le musicien tire fortement la corde par exemple avec l'index, ou bien la frappe avec le pouce. Le mouvement d'une corde pincée avec une grande amplitude est montré

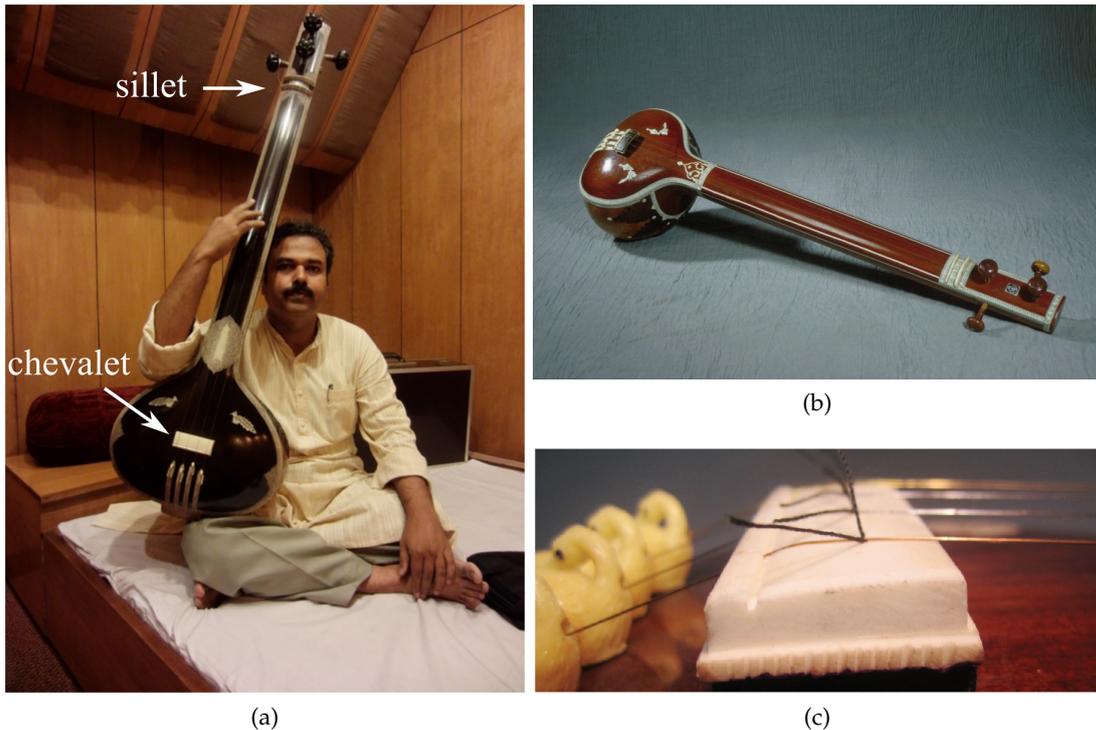


FIGURE 1.1 – (a) Musicien tenant une tampoura . Adapté de : (MIM) (b) Tampoura. Issu de : (GRINNELL COLLEGE) (c) Chevalet d'une tampoura. Issu de : (VAN WALSTIJN et al., 2014)

sur la figure 1.2(c), où l'on observe les six frettes les plus éloignées du sillet. Nous avons obtenu ces images de la corde la plus aiguë à l'aide d'une caméra rapide, les autres cordes sont réhaussées et ont été supprimées par traitement d'image pour une meilleure visibilité. L'ajustement des frettes est en effet déterminant lors du réglage de l'instrument, et s'ajuste en fonction des préférences des musiciens et de leurs modes de jeu de prédilection.

Si les phénomènes que nous avons évoqués sont en général recherchés, les contacts corde/obstacle peuvent également être indésirables. Ainsi, le phénomène de frise sur des instruments tels que la guitare correspond à de petits grésillements résultant de légers contacts entre la corde et les frettes (ou le manche pour une basse *fretless*), qui peuvent être évités en ajustant le profil des frettes ou en adaptant le geste du musicien.

Les phénomènes liés à des contacts entre solides sont également présents dans de nombreux systèmes de différentes natures et peuvent être liés à des problématiques de nuisances sonores ou de sécurité. Ainsi, dans le domaine automobile, les contacts entre les pneumatiques et la chaussée (DUBOIS, 2012) peuvent être nuisibles en termes de gêne sonore pour les passagers et les personnes extérieures au véhicule. Dans le domaine nucléaire, l'étude des contacts entre des tubes et leurs supports au niveau des générateurs de vapeur (MOUSSI et al., 2012) est un élément clef pour la sûreté de fonctionnement. Des contacts interviennent également en biomécanique, notamment au niveau des articulations (DONAHUE et al., 2002). Dans les turboréacteurs, de nombreux contacts, en particulier à l'extrémité des aubes du compresseur, ont un impact sur la durée de vie des composants (BATAILLY et al., 2012). Dans un tout autre registre, la modélisation des contacts est une problématique fréquemment rencontrée en infographie, notamment pour la simulation des mouvements des cheveux (BERTAILS-DESCOUBES et al., 2011) ou des vêtements (HARMON, 2010). Une mauvaise gestion des contacts conduit alors à des effets visuels aberrants.

L'étude de tels contacts préoccupe la communauté scientifique depuis plus d'un siècle (BROGLIATO, 1999; PFEIFFER et al., 1996). Les premiers développements notables peuvent être attribués à HERTZ (1882), avec sa formulation d'une loi générale pour le contact entre solides élastiques sans frottement. Il a ainsi étudié la collision de deux sphères élastiques de rayons différents et

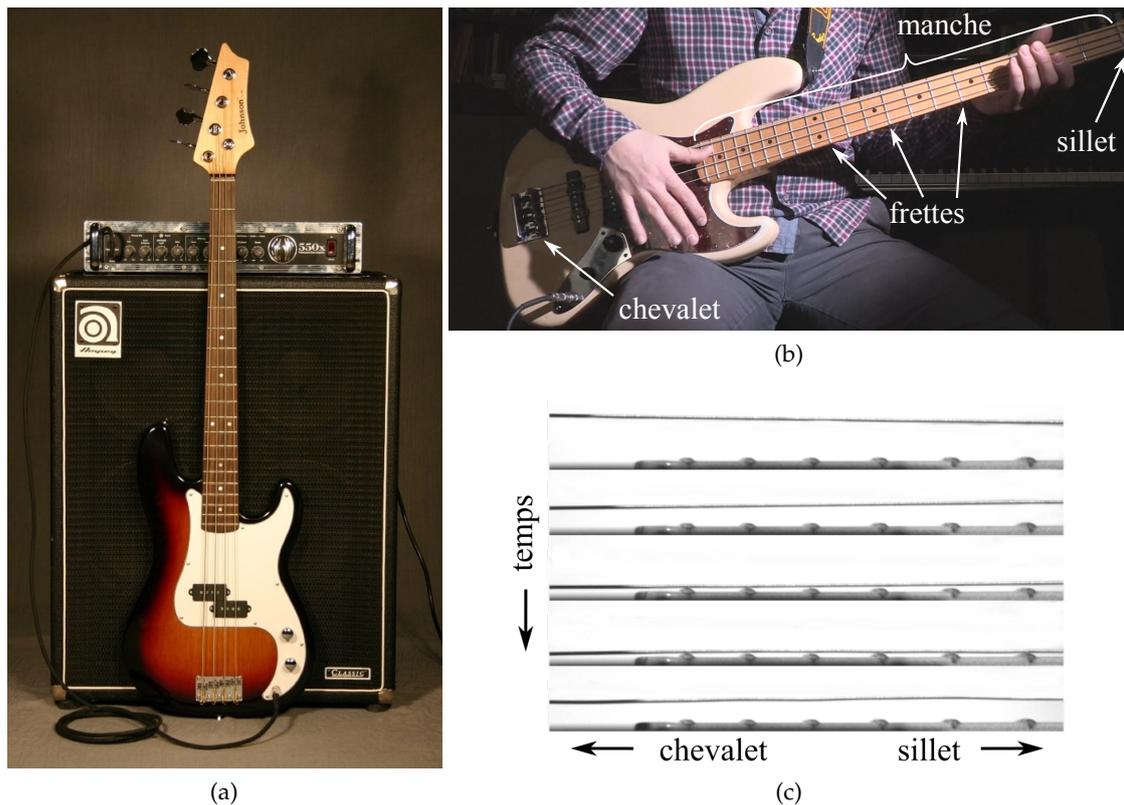


FIGURE 1.2 – (a) Basse électrique et système d'amplification. Issu de : (GRINNELL COLLEGE) (b) Basse électrique tenue par un musicien. (c) Images à la caméra rapide d'une corde de sol de basse électrique jouée à vide lors de sa première période de vibration, zoom sur les six dernières frettes.

défini la force de contact comme proportionnelle à leur interpénétration à la puissance $3/2$. Des travaux théoriques ont ensuite été menés dans la littérature au début du 20^{ème} siècle, motivés par des problématiques industrielles, liées par exemple aux voies ferrées (JOHNSON, 1985). Les modèles de contact se sont peu à peu libérés des hypothèses propres au modèle de Hertz. Ainsi, des phénomènes d'adhésion ont été pris en compte dans (JOHNSON et al., 1971; DERJAGUIN et al., 1975). Des solides rigides ont également été étudiés; par exemple, l'impact d'une sphère rigide avec un solide plastique est l'objet de (RICKERBY et al., 1980).

C'est à cette même époque que les premiers travaux sur la corde vibrante en présence d'un contact unilatéral ont été publiés. La dynamique de ce système offre une grande richesse en termes de problématiques théoriques, expérimentales et numériques. L'existence et l'unicité de la solution, loin d'être évidentes mathématiquement, ont été prouvées dans certains cas restreints à une corde idéale en présence d'un obstacle rigide (AMERIO, 1978; CABANNES, 1984a; CABANNES, 1996; SCHATZMAN, 1980a). En particulier, des solutions explicites ont été obtenues dans le cas d'un obstacle ponctuel centré, plan ou ayant certaines formes particulières (voir l'annexe B). L'existence et l'unicité de la solution au problème non régularisé ont été démontrées dans le cas d'une corde vibrant contre un obstacle ponctuel (SCHATZMAN, 1980b) et dans le cas d'un obstacle concave en imposant la conservation d'énergie (SCHATZMAN, 1980a). Dans le cas d'un obstacle convexe, le problème reste ouvert. Des modèles analytiques sont proposés dans (BURRIDGE et al., 1982; VYASARAYANI et al., 2009; ALSAHLANI et al., 2010; MANDAL et al., 2015) pour un obstacle courbe à l'une des extrémités de la corde sous l'hypothèse d'un enroulement parfait, c'est-à-dire un contact inélastique impliquant des pertes d'énergie. Cette hypothèse, toutefois, ne permet pas l'apparition de contacts multiples, que VYASARAYANI et al. (2009) pensent essentiels à la description du son d'instruments tels que le sitar.

Face à la difficulté de déterminer des solutions exactes, les méthodes numériques offrent une alternative attractive et ouvrent un large spectre d'applications en termes de synthèse sonore,

d'aide à la lutherie, ou de toute extension à divers domaines d'applications. Cependant, elles nécessitent le plus grand soin : le problème de contact est fortement non linéaire, il implique en particulier des transferts d'énergie vers les hautes fréquences et met ainsi souvent les méthodes numériques en difficulté. Parmi l'ensemble des modèles développés pour décrire un tel système, deux grandes familles se dégagent. Elles consistent à modéliser le contact soit de manière stricte, n'autorisant aucune pénétration, soit en pénalisant le contact, c'est-à-dire en régularisant la force de contact exprimée en fonction de l'interpénétration des solides en jeu. Notons que la convergence du problème pénalisé du contact entre une corde vibrante et un obstacle ponctuel unilatéral vers le problème non pénalisé a été démontrée par SCHATZMAN (1980b). Quelle que soit la méthode employée, la résolution numérique des problèmes de contact doit relever plusieurs défis, parmi lesquels la stabilité du schéma et l'absence d'artefacts tels que des amortissements artificiels ou de la dispersion numérique. Ce dernier enjeu se montre particulièrement crucial pour la simulation des cordes vibrantes à usage musical, car la dispersion physique est un des éléments clefs participant au timbre du son résultant. L'oreille humaine est en effet très sensible à son contenu fréquentiel, celui-ci doit donc être décrit numériquement le plus fidèlement possible. La simulation doit enfin permettre d'obtenir une solution qui soit physiquement cohérente. Cela nécessite notamment, le cas échéant, la prise en compte de lois d'impact pertinentes.

La stabilité d'un schéma numérique peut s'obtenir en s'appuyant sur la conservation d'une quantité invariante du système continu. Parmi ce type de schémas, on compte les schémas conservatifs, qui conservent une quantité correspondant à une énergie, ou symplectiques, qui conservent une quantité de nature géométrique correspondant à une aire orientée dans l'espace des phases (HAIRER et al., 2006). En général, l'une ou l'autre seulement de ces deux propriétés est vérifiée (GE et al., 1988). Pour la simulation de cordes vibrantes à usage musical, les schémas conservatifs semblent favorisés dans la littérature (CHABASSIER et al., 2010; CHATZIOANNOU et al., 2015; BILBAO et al., 2015) en vertu d'une meilleure précision et d'un meilleur comportement pour les systèmes oscillants.

De tels intégrateurs numériques ont récemment été mis en œuvre dans (CHATZIOANNOU et al., 2015; BILBAO et al., 2015) pour la simulation de cordes vibrantes en présence d'un obstacle unilatéral, appliquée plus spécifiquement à la tampoura ou à la guitare dans (VAN WALSTIJN et al., 2014; BILBAO et al., 2014). Dans ces études, la force de contact est régularisée, c'est-à-dire exprimée comme une fonction continue de l'interpénétration des objets en contact ; ce choix de modélisation du contact est également employé dans (TAGUTI, 2008; TRAUTMANN et al., 2004; DEBUT et al., 2016). Quelques travaux de la littérature mettent en place une méthode non régulière pour le contact corde/obstacle, comme dans (AHN, 2007), où la conservation de l'énergie discrète n'est cependant pas garantie. Par ailleurs, des modèles par guides d'ondes, s'appuyant sur des techniques de traitement du signal, sont exploités dans certaines études de la littérature qui se sont attachées à reproduire le mouvement d'une corde en présence d'un contact unilatéral (RANK et al., 1997; EVANGELISTA et al., 2010).

La plupart des travaux de la littérature traitant ce problème se restreignent à une seule polarisation transversale, cependant, les cordes des instruments de musique sont généralement excitées selon leurs deux polarisations ; en cas de contact selon l'une d'entre elles, des frottements peuvent intervenir qui doivent être pris en compte. Deux polarisations transversales sont ainsi incorporées dans (EVANGELISTA, 2011) dans un formalisme de guides d'ondes pour modéliser une corde en interaction avec des doigts et le manche, ainsi que dans (DESVAGES et al., 2015) dans le cas du violon, avec un modèle en différences finies. On trouve également une prise en compte des deux polarisations avec contact corde/obstacle dans (BRIDGES et al., 2015), dans la continuité des travaux exposés dans (CHATZIOANNOU et al., 2015).

Ainsi, de nombreuses études ont été développées pour la simulation d'une corde vibrante en

présence d'un obstacle unilatéral. Les outils qui en résultent visent à reproduire le mouvement de la corde vibrante et peuvent notamment aider à approfondir la compréhension que l'on en a. Afin d'attester de leur fiabilité, une comparaison à des résultats analytiques mais également à des expériences réelles est nécessaire. Nous avons vu que des solutions analytiques avaient été calculées dans certaines configurations. Par ailleurs, très peu d'études expérimentales sont disponibles, et les comparaisons entre simulation et expérience sont rares. Le cas d'une corde isolée a été étudié dans (ASTASHEV et al., 2001), où une corde en caoutchouc en présence d'obstacles ponctuels est excitée à l'une de ses extrémités, et dans (VALETTE et al., 1993), où une corde en présence d'un obstacle ponctuel est pincée soit au doigt soit à l'aide d'un plectre. Des mesures sur instrument sont présentées dans (TAGUTI et al., 2001 ; WEISSER et al., 2013 ; SIDDIQ, 2012), soulignant l'influence des forme et position de l'obstacle sur la sonorité de l'instrument. L'étude proposée dans (RANK et al., 1997), appliquée à la basse électrique, propose une comparaison de simulations à des signaux expérimentaux sur les premiers instants de jeu, issus d'un microphone électromagnétique de l'instrument. Enfin, le rendu de sons produits par un algorithme de synthèse par guides d'ondes du même instrument est évalué à l'aide d'un test d'écoute dans (KRAMER et al., 2017), ce qui constitue un autre critère de validation dont l'objectif est centré sur la synthèse sonore. Ainsi, quelques études cherchent à évaluer expérimentalement ou perceptivement la qualité des simulations produites ; toutefois, à notre connaissance, il n'existe pas d'étude dans la littérature proposant une comparaison sur des temps longs et de manière approfondie entre simulation et expérience.

1.2 Objectif

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'attachent à étudier l'influence d'un obstacle unilatéral sur la vibration d'une corde et les conséquences qui s'ensuivent.

Pour ce faire, nous cherchons tout d'abord à connaître le comportement de la corde au contact. On peut, pour cela, s'appuyer sur des solutions analytiques, dont nous avons vu qu'elles n'étaient que rarement connues, sur des expériences, qui doivent être répétées pour chaque nouvelle configuration, ou sur des simulations numériques, qui doivent respecter un certain nombre de propriétés dont la stabilité. Les méthodes numériques ont l'avantage majeur de s'adapter facilement à de nouvelles configurations. Elles permettent ainsi d'effectuer aisément des études paramétriques, afin d'identifier l'origine de certains phénomènes. Nous choisissons donc de travailler essentiellement sur les méthodes numériques, sans toutefois écarter les résultats analytiques et expérimentaux : ceux-ci donnent certains éléments de compréhension et permettront d'éprouver les modèles et méthodes numériques.

Nous avons vu qu'il existait deux grandes familles de modèles pour le contact corde/obstacle, selon que l'on régularise ou non la force de contact. Nous choisissons d'explorer ces deux approches. Nous cherchons ensuite à obtenir un schéma qui soit conservatif afin de garantir sa stabilité, et qui permette de modéliser une corde vibrante raide et amortie en présence d'un obstacle unilatéral de forme quelconque. Les méthodes développées dans (CHATZIOANNOU et al., 2015 ; BILBAO et al., 2015) répondent à ces attentes. Toutefois, ces études n'offrent que des approximations de la description de la dispersion et des amortissements de la corde. Or ceux-ci sont essentiels pour la compréhension et la perception des sons produits, l'oreille humaine étant particulièrement sensible à leur variation. Nous souhaitons donc en avoir une représentation plus réaliste. Nous choisissons pour cela de modéliser la corde par une approche modale, ce qui nous permettra d'inclure des valeurs d'amortissements mesurées ou bien issues de modèles physiques.

Afin d'évaluer la pertinence des modèles employés et les qualités des méthodes numériques développées, nous comparons les simulations à une solution analytique connue, puis à des données expérimentales dans le cas de cordes pincées, à l'aide de protocoles expérimentaux contrôlés.

1.3 Organisation du manuscrit

Après la présente partie I, les modèles continus et méthodes numériques employés pour l'étude du contact corde/obstacle sont présentés dans la partie II. Le chapitre 2 est consacré à la présentation du modèle de corde, puis des modèles de contact corde/obstacle. Des modèles de frottement y sont également exposés; cet aspect, intimement lié aux contacts, reste toutefois secondaire dans notre étude. Le chapitre 3 présente des schémas numériques pour chaque modèle de contact considéré. Deux schémas sont ainsi proposés pour une approche régularisante, dont l'un, dit mixte, est exploité par la suite. Un troisième schéma s'appuie sur une représentation non régulière du contact. Il a été mis en place dans les derniers mois de la thèse, et n'est mené à terme que pour un obstacle ponctuel. Pour cette configuration, le schéma régularisant dit mixte et le schéma non régulier sont confrontés à la solution analytique. Une mise en regard de ces deux méthodes est enfin proposée à la fin du chapitre 3. Suite à cela, les résultats numériques sont confrontés à des données expérimentales dans la partie III, dans laquelle on propose également une étude paramétrique numérique. Un protocole expérimental pour l'étude d'une corde isolée en présence d'un obstacle ponctuel est détaillé dans le chapitre 4. Les résultats expérimentaux y sont ensuite confrontés aux simulations numériques pour un obstacle centré ou proche d'une extrémité, cette dernière configuration constituant une modélisation d'un chevalet de tampoira. Le cas de la basse électrique est étudié expérimentalement et numériquement dans le chapitre 5. Des comparaisons entre simulations et expériences y sont à nouveau menées. Une étude paramétrique est ensuite conduite afin d'observer l'influence de paramètres choisis sur le son produit, certains pouvant être directement liés à des problématiques de facture instrumentale. Enfin, une conclusion à l'ensemble des travaux présentés est proposée dans la partie IV.

Deuxième partie

Modèles et méthodes numériques

Chapitre 2

Modèles

Ce chapitre est consacré aux modèles continus de la corde vibrante ainsi que du contact et du frottement corde/obstacle. Nous abordons en premier lieu le modèle de corde vibrante en l'absence d'obstacle dans la section 2.1. Deux approches distinctes sont ensuite présentées dans les sections 2.2 et 2.3 pour décrire à la fois le contact et le frottement corde/obstacle. Enfin, dans la section 2.4, un cas de référence est détaillé à travers une solution analytique, celui-ci sera repris dans les chapitres suivants. Une conclusion à ce chapitre est proposée dans la section 2.5.

2.1 La corde vibrante

Dans cette section, nous décrivons l'objet d'étude de l'ensemble des travaux présentés dans ce document, à savoir la corde vibrante. Nous ne prenons pas de contact en compte pour l'instant, ce point sera abordé par la suite. L'objectif est de travailler sur une représentation physique réaliste du comportement de la corde vibrante dans le cadre d'hypothèses simplificatrices pertinentes. Il offrira de cette manière un socle relativement simple mais fiable pour la prise en compte d'un contact unilatéral corde/obstacle, ce phénomène constituant le cœur de ce manuscrit.

Une fois le modèle de corde vibrante décrit, notamment à travers une description de la raideur, de l'amortissement et d'un couplage faible aux extrémités de la corde, nous proposons une représentation modale de la corde qui permet d'inclure dans les simulations numériques une description fine des fréquences propres et amortissements de la corde, essentiels pour la compréhension du mouvement de la corde et l'analyse des sons produits.

2.1.1 Description linéaire de la corde

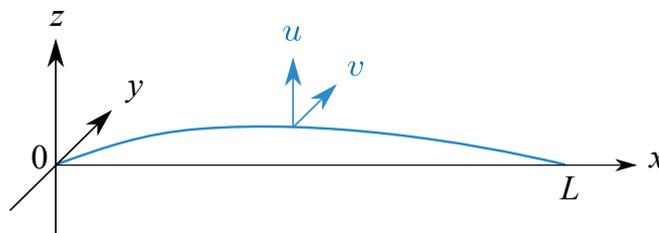


FIGURE 2.1 – Une corde vibrante de longueur L .

Considérons une corde homogène de longueur L (m), de densité linéique μ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$) et tendue entre ses extrémités avec une tension T (N) (voir la figure 2.1).

Lorsqu'une telle corde est excitée, différents types de mouvements peuvent intervenir, à savoir les mouvements transversaux (selon (Oy) et (Oz)), longitudinaux (selon (Ox)), et de torsion.

Nous considérons des hypothèses simplificatrices dont la pertinence pour les instruments étudiés dans ce manuscrit sera mise en évidence dans les chapitres 4 et 5. Nous nous plaçons ainsi sous l'hypothèse de petits déplacements, et les ondes longitudinales sont négligées. En particulier, nous ne considérons pas de non-linéarité géométrique. Celle-ci peut être modélisée par un système d'équations couplées, et en cas de grands déplacements, elle peut induire une variation significative de la fréquence fondamentale au cours de la vibration. Nous négligeons également les ondes de torsion.

Le modèle de vibration transversale le plus simple s'appuie sur l'hypothèse d'une corde parfaitement souple (infiniment fine) et élastique. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique sur un élément infinitésimal de la corde, et grâce à l'hypothèse de petits déplacements, on obtient l'équation suivante (équation de d'Alembert, ou équation des ondes) sur le déplacement u selon (Oz) :

$$\mu u_{tt} - T u_{xx} = 0, \quad (2.1)$$

où l'indice t (respectivement x) correspond à la dérivée partielle en temps (respectivement en espace). Nous considérons des conditions aux limites dites de Dirichlet, telles que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $u(0, t) = u(L, t) = 0$. En l'absence de couplage entre les deux polarisations transversales, l'équation du mouvement selon (Oy) et les conditions aux limites associées ont une forme similaire.

Au niveau spectral, l'équation (2.1) assortie de conditions aux limites de Dirichlet donne des fréquences propres ν_j parfaitement harmoniques, c'est-à-dire qu'elles sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale ν_0 : $\nu_j = j\nu_0$, avec $\nu_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

En réalité, les cordes ont un diamètre non nul et sont dotées d'une raideur en flexion. Cette raideur a notamment pour effet de rendre le spectre inharmonique, c'est-à-dire que les fréquences propres de la corde ne sont plus des multiples entiers de la fréquence fondamentale, mais sont d'autant plus décalées que la fréquence est élevée.

L'équation décrivant le mouvement transversal de la corde selon (Oz) est alors :

$$\mu u_{tt} - T u_{xx} + EI u_{xxxx} = 0, \quad (2.2)$$

où E est le module d'Young (Pa) du matériau de la corde et I est le moment d'inertie associé à une section circulaire $I = \frac{\pi r^4}{4}$, où r est le rayon de la corde (m).

Des conditions aux limites en appui simple sont considérées, elles sont couramment utilisées dans le cas de cordes de faible raideur à usage musical (VALETTE et al., 1993 ; CUESTA et al., 1990) :

$$u(0, t) = u(L, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.3)$$

On peut montrer que les fréquences propres sont alors données par :

$$\nu_j = j\nu_0 \sqrt{1 + B j^2} \approx j \frac{c_0}{2L} \left(1 + \frac{B}{2} j^2\right), \quad (2.4)$$

où $c_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ est la vitesse de phase de la corde idéale, $B = \frac{\pi^2 EI}{TL^2}$ est le coefficient d'inharmonicité, et en supposant la raideur faible par rapport à la tension, cette approximation étant valable en basses fréquences (VALETTE et al., 1993). Ce modèle a montré une très bonne correspondance aux observations physiques dans les cas que nous avons étudiés (voir la section 4.2 dans le cas d'une corde de guitare électrique, sur une plage de 7200 Hz, et la section 5.2 dans le cas d'une corde de guitare basse électrique, sur une plage de 3500 Hz).

Des modèles plus complexes permettent de prendre en compte certains phénomènes physiques plus en détails. Par exemple, le modèle de Timoshenko prend en compte le cisaillement et l'inertie de rotation et conduit à un système d'équations linéaires couplées pour la description de la corde ; il est notamment utilisé dans (CHABASSIER, 2012) pour des cordes de piano, bien plus

raides que celles que nous étudierons.

Dans le cadre de cette étude, nous choisissons de modéliser les déplacements de la corde par les équations (2.2) et (2.3) car ce modèle permet une représentation des mécanismes principaux à travers une description qui reste très simple grâce aux hypothèses susmentionnées. Elle offre ainsi un socle pertinent que nous compléterons par la suite par la prise en compte de contacts entre la corde et un obstacle unilatéral, ce contact constituant le cœur des travaux présentés dans ce manuscrit.

Nous introduisons enfin l'énergie du système. En effet, lors de la discrétisation des équations du système, nous chercherons à conserver une forme d'énergie afin de garantir certaines propriétés clés. L'énergie totale est obtenue en multipliant l'équation du mouvement (2.2) par la vitesse u_t . Par intégration par parties, on obtient l'expression de l'énergie continue :

$$\mathcal{H}_l = \int_0^L \left[\frac{\mu}{2} (u_t)^2 + \frac{T}{2} (u_x)^2 + \frac{EI}{2} (u_{xx})^2 \right] dx, \quad (2.5)$$

où l'indice l rappelle que cette expression s'applique à la corde linéaire, et où les trois premiers termes correspondent aux énergies respectivement liées à l'inertie, la tension et la raideur de la corde. Elle satisfait $\mathcal{H}_l \geq 0$ ainsi que l'égalité suivante :

$$\frac{d\mathcal{H}_l}{dt} = 0, \quad (2.6)$$

ce qui traduit la conservation de l'énergie.

Jusqu'ici, les pertes n'ont pas été incluses et aucun couplage entre les polarisations transversales ou entre la corde et une structure environnante n'a été considéré. Avant de donner un modèle de pertes détaillé, nous présentons une approche modale du système étudié, car elle permettra par la suite une prise en compte particulièrement pertinente et réaliste des pertes.

2.1.2 Approche modale

Nous introduisons ici une description modale de la corde vibrante (section 2.1.2.1) ; ce choix sera justifié dans la section 2.1.2.2 à travers un exemple simple. Les pertes sont enfin incluses dans la section 2.1.2.3.

2.1.2.1 Description modale de la corde vibrante

Nous cherchons à déterminer les fonctions $\phi_j(x)$, $j \in \mathbb{N}^*$, formant une base modale de la corde vibrante. Pour cela, on résout le problème aux valeurs propres lié à l'équation (2.2) sans contact, qui consiste à trouver les fonctions $\phi_j(x)$ solutions de :

$$-T\phi_j'' + EI\phi_j'''' - \mu\omega_j^2\phi_j = 0, \quad (2.7)$$

où $'$ désigne la dérivée spatiale, $\omega_j = 2\pi\nu_j$, et en considérant les conditions aux limites données dans l'équation (2.3).

Une forme générale des solutions est donnée par :

$$\phi_j(x) = a_j \cos(k_j x) + b_j \sin(k_j x) + c_j \cosh(l_j x) + d_j \sinh(l_j x), \quad (2.8)$$

où a_j, b_j, c_j, d_j, k_j et l_j sont à déterminer.

On applique ensuite les conditions aux limites, puis on normalise la solution obtenue. On obtient ainsi les modes normaux :

$$\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad \text{pour } j \in \mathbb{N}^*. \quad (2.9)$$

On peut montrer qu'ils sont orthogonaux, tels que $\forall j, k \in \mathbb{N}^*$:

$$\langle \phi_j(x), \phi_k(x) \rangle = \delta_{jk}, \quad (2.10)$$

où $\langle \phi_j(x), \phi_k(x) \rangle = \int_0^L \phi_j(x)\phi_k(x)dx$ définit un produit scalaire sur $L^2(]0, L[)$.

Les pulsations propres sont données par la relation de dispersion suivante, obtenue en injectant une solution sous la forme d'une onde progressive dans l'équation (2.2) :

$$\mu\omega_j^2 = Tk_j^2 + EI k_j^4, \quad (2.11)$$

avec $k_j = \frac{j\pi}{L}$. On obtient ainsi $\nu_j = j \frac{c_0}{2L} \sqrt{1 + B j^2}$, ce qui correspond à la relation donnée dans la section 2.1.1.

Nous notons $\hat{u}(x, t)$ le déplacement de la corde $u(x, t)$ tronqué à N_m modes, il est défini par :

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{j=1}^{N_m} q_j(t)\phi_j(x), \quad (2.12)$$

où q_j est la $j^{\text{ème}}$ amplitude modale. Par souci de simplicité, la notation \wedge est omise par la suite.

En exprimant u à l'aide de son expansion (2.12) dans (2.2) et en mettant à profit l'orthogonalité des modes propres évoquée précédemment, on obtient :

$$\mu(\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

où le vecteur $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_{N_m}]^T$ contient les coefficients modaux, $\ddot{\mathbf{q}}$ ses dérivées secondes en temps, et où $\mathbf{\Omega}$ est une matrice diagonale dont les coefficients $\Omega_{jj} = \omega_j = 2\pi\nu_j$ représentent les pulsations propres de la corde.

2.1.2.2 Justification du choix d'une approche modale

Dans cette section, nous montrons à travers un exemple simple l'intérêt de s'orienter vers une approche modale du problème de la corde vibrante. Considérons l'équation des ondes pour une corde idéale : $\mu u_{tt} - T u_{xx} = 0$. La prise en compte des pertes dans l'équation aux dérivées partielles exprimée dans le domaine temporel n'est pas un problème évident. Les amortissements peuvent être approchés à l'aide d'opérateurs de dérivation spatiale et temporelle. Une première approche, très simple, consiste à écrire :

$$\mu u_{tt} - T u_{xx} + 2\sigma_0 u_t = 0, \quad (2.14)$$

où $\sigma_0 \geq 0$ est un paramètre d'amortissement.

Le terme $2\sigma_0 u_t$ représente des pertes indépendantes de la fréquence. Des modèles plus complexes de la littérature s'attachent à améliorer le réalisme de l'amortissement en incluant des pertes dépendantes de la fréquence, par exemple dans (CHAIGNE et al., 1994; BILBAO, 2009; CHATZIOANNOU et al., 2015; DESVAGES et al., 2016), sans toutefois permettre d'associer à chaque mode un coefficient d'amortissement quelconque; or des mesures fines d'amortissements ont montré que la dépendance fréquentielle des pertes pouvait être très complexe, par exemple à cause

de conditions aux limites particulières, et s'éloigner de ces modèles (PATÉ et al., 2014; ISSANCHOU et al., 2018).

Remplaçons à présent u par son expansion modale (2.12). L'équation (2.14) se réécrit alors, $\forall j \in \{1, \dots, N_m\}$:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j + 2\sigma_0 \dot{q}_j = 0, \quad (2.15)$$

où (\cdot) désigne la dérivée temporelle, et ω_j , $j \in \{1, \dots, N_m\}$, les pulsations propres de la corde.

Contrairement au cas de l'équation écrite dans l'espace physique et de même que pour les méthodes spectrales, il est ici très facile d'imposer des pertes propres à chaque mode : il suffit pour cela de donner une dépendance en j à σ_0 . Les coefficients $\sigma_0(j)$, notés σ_j par la suite, peuvent être obtenus expérimentalement et permettent de décrire une dépendance fréquentielle quelconque.

Finalement, nous retiendrons que l'approche modale permet de prendre en compte l'amortissement de chaque mode de manière plus précise que l'approche temporelle, car elle permet d'ajuster le coefficient d'amortissement correspondant à chaque fréquence selon des données expérimentales par exemple.

2.1.2.3 Équation de la corde amortie

Dans l'équation (2.13) régissant le mouvement d'une corde sans perte, on remarque que la partie linéaire correspond à la description d'un oscillateur non amorti pour chaque mode. L'amortissement peut donc être introduit en généralisant chaque mode à un oscillateur amorti. Sous l'hypothèse d'amortissements faibles, *i.e.* $\zeta_j = \sigma_j/\omega_j \ll 1$, et en supposant un amortissement visqueux, *i.e.* proportionnel à la vitesse de vibration de l'oscillateur, l'équation (2.13) devient :

$$\mu(\ddot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \mathbf{q} + 2\Upsilon \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}, \quad (2.16)$$

où Υ est une matrice diagonale dont les coefficients $\Upsilon_{jj} = \sigma_j \geq 0$ représentent les amortissements liés à chacun des modes, ils sont définis plus en détail dans la section 2.1.2.5.

Nous souhaitons à présent complexifier ce modèle afin de le rendre applicable à certains instruments de musique, en particulier la basse électrique qui sera étudiée par la suite. Cela nécessite la prise en compte d'un couplage à l'une des extrémités de la corde pour rendre compte de sa mobilité.

2.1.2.4 Couplage aux extrémités et fréquences propres

Nous introduisons à présent un couplage aux extrémités de la corde avec la structure qui la maintient. Nous considérerons par la suite une corde soit isolée, soit montée sur une basse électrique. Par conséquent nous présentons un modèle s'appuyant sur des hypothèses propres à ces configurations. Le chevalet, dont la mobilité est très faible par rapport à celle au sillet, est ainsi supposé rigide (PATÉ et al., 2014; FLEISCHER, 2005). La mobilité au sillet Y_s , en revanche, doit être prise en compte. Suivant les travaux présentés dans (VALETTE et al., 1993), $\mu c_0 Y_s$ est supposé petit devant 1, ce qui conduit à traduire la mobilité du sillet par une petite perturbation du nombre d'onde k_j comme suit :

$$k_j = \frac{j\pi}{L} - i \frac{\mu c_0 Y_s}{L} \quad \text{avec } i^2 = -1. \quad (2.17)$$

Cette perturbation a pour effet de modifier les fréquences propres et amortissements. Cependant, la corde ne reçoit pas d'énergie, et il n'en résulte pas de transfert entre les deux polarisations transversales. Le couplage corde/structure est dit faible (PATÉ, 2014).

Ainsi, sous l'hypothèse d'un couplage faible au sillet, et d'une raideur faible devant la tension (hypothèse basses fréquences), on peut montrer (VALETTE et al., 1993; PATÉ et al., 2014) que les fréquences propres sont données par la relation suivante, pour tout mode j :

$$\nu_j = j \frac{c_0}{2L} \left(1 + \frac{Bj^2}{2} + \frac{\mu c_0}{j\pi} \text{Im}(Y_s(\omega_{0,j})) \right), \quad (2.18)$$

où $c_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ est la vitesse de phase de la corde idéale, $B = \frac{\pi^2 EI}{TL^2}$ est le facteur d'inharmonicité et Y_s est la mobilité au sillet, ici évaluée en $\omega_{0,j} = j \frac{\pi c_0}{L}$. La valeur de B est déduite de mesures (voir les sections 4.2 et 5.2). Dans les cordes à usage musical étudiées, l'amortissement est très faible, si bien que la différence entre les fréquences amorties ν_a et non amorties ν_{na} , liées par la relation $\nu_a = \nu_{na} \sqrt{1 - \zeta_j^2}$, est négligeable en basses fréquences. Nous ne prenons donc pas en compte cette déviation de fréquence ici. Toutefois, l'amortissement reste essentiel en lui-même et régit en partie l'évolution d'une sonorité au cours du temps. La section suivante est consacrée à sa modélisation.

2.1.2.5 Amortissement : frottement dans l'air et pertes internes

L'avantage de l'approche modale a été mis en avant dans la section 2.1.2.2. Elle permet en effet d'attribuer un coefficient d'amortissement à chaque mode, selon une dépendance quelconque. Ces valeurs peuvent ainsi être obtenues directement à l'aide d'une expérience ; toutefois, dans le cas où de telles mesures ne seraient pas disponibles, on peut avoir recours à un modèle de pertes. Nous présentons donc ici un modèle physique d'amortissement pour la corde vibrante.

Ce modèle théorique, proposé par VALETTE et al. (1993), prend en compte la dépendance fréquentielle des pertes modélisées par σ_j pour tout mode j . Ce modèle est spécifiquement adapté aux cordes à usage musical, et présente une dépendance fréquentielle forte qui ne peut être aisément décrite en temporel. Il néglige en particulier les pertes par rayonnement acoustique, et décrit les trois principaux effets alimentant les mécanismes de dissipation dans les cordes, à savoir les frottements dans l'air, la viscoélasticité et la thermoélasticité du matériau, qui s'expriment à travers le facteur de qualité $Q_j = \pi \nu_j / \sigma_j$ comme suit :

$$Q_j^{-1} = Q_{j,\text{air}}^{-1} + Q_{j,\text{ve}}^{-1} + Q_{\text{te}}^{-1} + \frac{\mu c_0^2}{\pi L \nu_j} \text{Re}(Y_s(\omega_j)), \quad (2.19)$$

où les indices air, ve et te correspondent respectivement aux pertes par frottement avec l'air et aux effets viscoélastiques et thermoélastiques.

Détaillons les différents termes présents dans cette expression. Le premier modélise les frottements de la corde dans l'air, il correspond au modèle de Stokes pour un écoulement laminaire alternatif autour d'un cylindre. Bien que l'hypothèse d'écoulement laminaire soit discutable pour le système étudié, ce modèle a montré de très bons résultats en comparaison avec l'expérience pour de petites amplitudes de vibration dans (VALETTE et al., 1993). L'expression des pertes liées aux frottements de la corde dans l'air est finalement :

$$Q_{j,\text{air}}^{-1} = \frac{j c_0}{2L \nu_j} \frac{R}{2\pi \mu \nu_j}, \quad R = 2\pi \eta_{\text{air}} + 2\pi d_{\text{eq}} \sqrt{\pi \eta_{\text{air}} \rho_{\text{air}} \nu_j}, \quad (2.20)$$

où η_{air} et ρ_{air} sont respectivement le coefficient de viscosité dynamique et la densité de l'air. Ces pertes sont prépondérantes en basses fréquences. Dans le cas d'une corde pleine, la valeur de d_{eq} correspond simplement au diamètre de la corde. Si la corde est filée en revanche, nous prenons en compte un diamètre équivalent donné par :

$$d_{\text{eq}} = \frac{\pi}{2} \left(\left(1 + \frac{2}{\pi} \right) 2r_{\text{trait}} + 2r_{\text{âme}} \right), \quad (2.21)$$

où $r_{\text{âme}}$ est la rayon de l'âme et r_{trait} celui du trait de la corde.

Le second terme de (2.19) modélise les pertes viscoélastiques. Il rend compte du retard de la déformation sur la contrainte en introduisant un retard de phase δ_{ve} dans l'expression du module d'Young. Il s'écrit :

$$Q_{j,ve}^{-1} = \frac{4\pi^2 \mu E_{\text{âme}} J_{\text{âme}} \delta_{ve}}{T^2} \frac{\nu_{0,j}^3}{\nu_j}, \quad (2.22)$$

où $E_{\text{âme}}$ est le module d'Young de l'âme de la corde et $I = \frac{\pi r_{\text{âme}}^4}{4}$ son moment d'inertie, et avec $\nu_{0,j} = \frac{j^2 c}{2L}$. Ces pertes sont prépondérantes dans les hautes fréquences.

Enfin, Q_{te}^{-1} caractérise le comportement thermoélastique. Lors de sa vibration, la corde subit des échauffements et refroidissements qui donnent lieu à des transferts de chaleur et, de ce fait, à des pertes irréversibles. Celles-ci sont négligeables en basses et hautes fréquences. Elles peuvent être prises en compte par une nouvelle perturbation du module d'Young, comme fait dans (PATÉ et al., 2014), ou, plus simplement, par une constante qui vient apporter une correction au modèle dans un domaine de fréquences intermédiaire. Nous optons ici pour cette dernière approche.

La plupart des paramètres du modèle de pertes (2.19) ont des valeurs pouvant être déterminées physiquement, seuls deux doivent encore être évalués : δ_{ve} et Q_{te}^{-1} . Leur valeur peut être choisie parmi des valeurs typiques présentées dans la littérature ou bien déduite d'une expérience afin de modéliser précisément la dépendance fréquentielle sur une corde réelle (VALETTE et al., 1993; PATÉ et al., 2014) (voir les sections 4.2 et 5.2). Une telle identification permet de prendre en compte, indirectement, des phénomènes qui ne seraient pas inclus dans le modèle.

2.1.2.6 Conditions initiales

Afin de compléter le modèle de corde vibrante, il convient de définir les conditions initiales. Nous considérons une condition en déplacement telle que la corde ait une forme triangulaire, sans vitesse, à l'instant initial. Ce choix présente plusieurs avantages : d'une part, il existe pour ce type de configuration initiale et pour certains types d'obstacles une solution analytique au problème du contact corde/obstacle. Ainsi, ce choix facilite la comparaison des résultats numériques que nous obtiendrons avec une solution analytique. D'autre part, ce pincement simplifié peut être obtenu relativement aisément expérimentalement, nous y reviendrons dans le chapitre 4.

Nous avons jusqu'ici présenté un modèle linéaire pour la corde vibrante, exprimé à l'aide d'une approche modale de son mouvement. Nous introduisons à présent un obstacle unilatéral, qui rend le problème non linéaire. Nous prenons également en compte une force de frottement entre la corde et l'obstacle selon la polarisation horizontale (Oy). Deux types de modélisations sont explorés, qui se distinguent en ce qu'ils régularisent ou non la force de contact.

2.2 Comment modéliser les contacts corde/obstacle ?

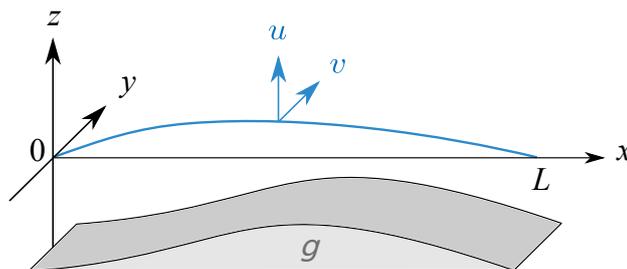


FIGURE 2.2 – Une corde de longueur L vibrant en présence d'un obstacle $g(x)$.

Le problème de la corde vibrante en présence d'un contact unilatéral (voir la figure 2.2) peut se formuler en ajoutant une force f au second membre de l'équation (2.2) :

$$\mu u_{tt} - T u_{xx} + E I u_{xxxx} = f, \quad (2.23)$$

où $f(x, t)$ représente la force extérieure par unité de longueur exercée par l'obstacle sur la corde.

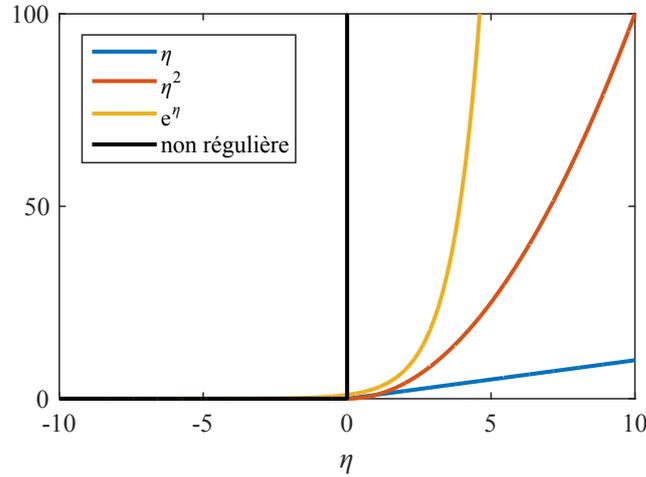


FIGURE 2.3 – Allures de différentes forces de contact.

Diverses approches peuvent être adoptées pour l'appréhension de la force de contact, on trouvera un recensement des méthodes pour le contact entre corps rigides par exemple dans (BANERJEE et al., 2017). On peut en particulier distinguer deux familles de modèles correspondant à deux choix de modélisation qui s'opposent en ce que l'une est régularisante tandis que la seconde est non régulière. La première consiste à pénaliser le contact en appliquant une force de l'obstacle vers la corde d'autant plus forte que la pénétration $\eta(x, t) = g(x) - u(x, t)$ est grande. Bien que cette force soit généralement choisie comme étant nulle si les solides ne se touchent pas, cette condition n'est pas nécessaire et peut même s'avérer néfaste dans certains contextes, par exemple en cas de contact entre des surfaces (HARMON, 2010). Quelques choix possibles de lois régularisées sont illustrés par les trois premières courbes de la figure 2.3. Les lois η et η^2 sont des lois de type Hertz généralisées, c'est-à-dire de la forme :

$$f = K [\eta(x, t)]_+^\alpha, \quad (2.24)$$

où $[\eta]_+ = \frac{1}{2} (\eta + |\eta|)$ est la partie positive de η , et où les coefficients K et α peuvent être ajustés en fonction des matériaux en contact (GOLDSMITH, 2001 ; MACHADO et al., 2012 ; BANERJEE et al., 2017). La troisième loi est une loi exponentielle.

L'approche non-régulière suppose quant à elle une action immédiate de la force de contact, sans autoriser de pénétration. La force de contact suit dans ce cas une loi dite de Signorini, introduite en 1933 (SIGNORINI, 1933) et qui s'exprime de la manière suivante :

$$0 \leq -\eta \perp f \geq 0. \quad (2.25)$$

Cette expression signifie que soit $\eta(t) = 0$ et $f(t) \geq 0$, soit $f(t) = 0$ et $-\eta(t) \geq 0$, elle est illustrée par la courbe noire de la figure 2.3.

Nous avons choisi d'explorer ces deux types de modèles. Nous décrivons tout d'abord le modèle régularisé employé dans la section 2.2.1, puis nous détaillons le modèle non régulier dans la section 2.2.2. Ce dernier modèle a été abordé au cours des derniers mois de la thèse, il n'est par conséquent pas exploité à mesure égale avec le modèle régularisé dans la suite de ce document.

2.2.1 Force de contact régularisée

La première approche que nous adoptons consiste à régulariser la force de contact. Nous choisissons cette force nulle tant que la corde ne pénètre pas l'obstacle. Une famille de lois de puissance à deux paramètres de type Hertz est employée pour la force de contact :

$$f(x, t) = f(\eta(x, t)) = K [\eta(x, t)]_+^\alpha, \quad (2.26)$$

où K et α définissent la raideur du contact. Ce modèle d'interaction a déjà été utilisé dans le cadre de l'acoustique musicale pour des interactions diverses, voir par exemple (BILBAO et al., 2015; BILBAO, 2009; CHAIGNE et al., 1994; CHAIGNE et al., 2000; CHATZIOANNOU et al., 2015). Dans (CHAIGNE et al., 1994), il est utilisé pour modéliser l'interaction entre un marteau et une corde de piano et décrit la compression du feutre du marteau. Ce même type de modèle est utilisé dans (BOUTILLON, 1988), avec un coefficient α variable afin de rendre compte de la boucle d'hystérésis liée à la compression du feutre. Dans le cas présent d'une corde heurtant un corps rigide, l'expression de la force représente une pénalisation de l'interpénétration qui doit rester petite; ainsi, la valeur de K doit être grande par rapport à la tension et à l'effort tranchant. Des exemples de valeurs de K et α prises dans la littérature dans le cadre de contacts corde/obstacle ainsi que certaines données clefs du problème sont présentés dans le tableau 2.1.

obstacle	L (m)	T (N)	μ (kg.m ⁻¹)	EI (N.m ²)	α	K
plan	0.7	100	0.001	0	1	$10^7, 10^9$
chevalet courbe	0.628	19.8	5.58×10^{-4}	8.35×10^{-5}	1	5×10^8
chevalet courbe	1	33.1	4.83×10^{-4}	6.03×10^{-5}	1	4.39×10^8
chevalet courbe	0.62	670	6.3×10^{-3}	0	1.3	10^{13}
manche de guitare	0.65	60	5.25×10^{-3}	1.07×10^{-2}	2.3	10^{15}

TABLE 2.1 – Exemples de valeurs de paramètres de modèles de corde en présence d'un contact unilatéral issus de (CHATZIOANNOU et al., 2015; VAN WALSTIJN et al., 2016a; BILBAO et al., 2014; BILBAO et al., 2015).

La force de contact linéique (2.26) dérive d'un potentiel ψ :

$$f = \frac{d\psi}{d\eta}, \quad \text{avec} \quad \psi(\eta) = \frac{K}{\alpha + 1} [\eta]_+^{\alpha+1}. \quad (2.27)$$

L'énergie totale du système est donnée par :

$$\mathcal{H} = \int_0^L \left[\frac{\mu}{2} (u_t)^2 + \frac{T}{2} (u_x)^2 + \frac{EI}{2} (u_{xx})^2 + \psi \right] dx, \quad (2.28)$$

où le dernier terme correspond à l'énergie stockée dans le mécanisme de contact. Elle satisfait à nouveau $\mathcal{H} \geq 0$ et $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$.

Ce modèle peut être complété par des pertes dues au contact, comme décrit notamment dans (HUNT et al., 1975; MACHADO et al., 2012; BILBAO et al., 2015; BANERJEE et al., 2017). Pour cela, la force de contact donnée par (2.26) peut être modifiée d'après le modèle de HUNT et al. (1975) :

$$f = \frac{d\psi}{d\eta} - \frac{\partial u}{\partial t} K \beta [\eta]_+^{\tilde{\alpha}}, \quad (2.29)$$

avec $\beta \geq 0$. Par souci de simplicité, nous choisissons $\tilde{\alpha} = \alpha$ dans le terme lié aux pertes au contact, une valeur différente pourrait toutefois être envisagée.

Si l'on se ramène à la description modale exposée dans la section 2.1.2, l'équation décrivant le système est :

$$\mu(\ddot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \mathbf{q} + 2\Upsilon \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}, \quad (2.30)$$

où le vecteur \mathbf{F} représente la projection modale de la force de contact, ses coefficients sont donnés

$$\text{par } F_j = \int_0^L f(x, t) \phi_j(x) dx, \forall j \in \{1, \dots, N_m\}.$$

La force \mathbf{F} dérive d'un potentiel G :

$$F_j = -\frac{\partial G(q_1, \dots, q_{N_m})}{\partial q_j}, \quad (2.31)$$

avec :

$$G(q_1, \dots, q_{N_m}) = \frac{K}{\mu(1 + \alpha)} \int_0^L \left[g(x) - \sum_{j=1}^{N_m} q_j(t) \phi_j(x) \right]_+^{\alpha+1} dx. \quad (2.32)$$

2.2.2 Force de contact non régulière

Dans cette section, nous introduisons le formalisme des méthodes non régulières (ou non lisses¹). Parmi les méthodes non régulières, on peut distinguer les méthodes à détection d'évènements de contact (*event-driven schemes* en anglais), qui recherchent les évènements de contact et adaptent le pas de temps en conséquence, et les méthodes à capture d'évènements (*time-stepping schemes* en anglais), pour lesquelles les impacts peuvent survenir au cours d'un pas de temps (ACARY et al., 2008 ; STUDER, 2009). La première méthode, si elle peut permettre un meilleur ordre de la méthode d'intégration, présente plusieurs inconvénients. En particulier, elle n'est pas appropriée lorsque les instants de contact sont nombreux et non connus à l'avance, et ne peut gérer le cas d'un point d'accumulation (ACARY, 2009). Nous choisissons donc, dans le cadre de l'étude du contact corde/obstacle, la seconde approche.

L'objet de cette section est de mettre en œuvre un modèle non régulier afin de proposer une approche du contact différente, s'exprimant à travers d'autres types de contraintes et avantages. En particulier, la méthode non régulière employée permet une gestion différente des pertes au contact, comme nous le verrons, à travers un coefficient de restitution. Ce coefficient est le seul paramètre du modèle, au lieu des deux paramètres α et K (voire quatre si l'on prend en compte les pertes décrites dans l'équation (2.29)) pour la méthode régulière retenue.

Nous introduisons tout d'abord quelques notions mathématiques nécessaires pour la compréhension du modèle exposé par la suite, elles sont principalement issues de (ACARY et al., 2008 ; STUDER, 2009).

2.2.2.1 Premières définitions et propriétés

Afin d'illustrer notre propos, nous prenons dans cette section (et cette section seulement) l'exemple d'une particule dont le mouvement serait décrit par $q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$ et soumise à un contact unilatéral pour lequel aucune pénétration ne serait autorisée. Cette hypothèse de départ distingue les méthodes non régulières des modèles régularisants ; toutefois nous verrons qu'en pratique, les simulations numériques qui en sont issues peuvent autoriser une légère pénétration (voir la section 3.3). En supposant l'obstacle placé en $q = 0$, le contact peut être décrit en position à l'aide de la loi de Signorini exposée précédemment, où f est la force de contact :

$$0 \leq q \perp f \geq 0. \quad (2.33)$$

1. Ce type de méthode est désigné en anglais par *nonsmooth contact dynamics*. En français, on parle de méthode non régulière ou non lisse ; il ne semble pas encore y avoir de consensus sur cette traduction.

Cette relation est une *condition de complémentarité*, et se comprend de la manière suivante :

$$0 \leq q \perp f \geq 0 \Leftrightarrow q \geq 0, f \geq 0 \text{ et } \langle q, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q(t) = 0 \text{ et } f(t) \geq 0 \\ \text{ou} \\ f(t) = 0 \text{ et } q(t) \geq 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans \mathbb{R} .

Une condition de complémentarité peut s'exprimer de manière équivalente sous forme d'inclusion dans un cône normal. Rappelons la définition d'un cône normal.

Définition 2.1 (*Cône normal*). Le cône normal N_K d'un ensemble convexe fermé non vide $K \subset \mathbb{R}^n$ en $x \in K$ est défini par :

$$N_K(x) = \{v \in \mathbb{R}^n, \langle v, y - x \rangle \leq 0 \ \forall y \in K\}. \quad (2.35)$$

Les relations suivantes sont alors vérifiées :

$$0 \leq q \perp f \geq 0 \Leftrightarrow -f \in N_{\mathbb{R}^+}(q) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \dot{q} \perp f \geq 0 & \text{si } q = 0 \\ f = 0 & \text{si } q > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -f \in N_{T_{\mathbb{R}^+}(q)}(\dot{q}). \quad (2.36)$$

Le cône normal pris en x , $N_{\mathbb{R}^+}(x)$, est égal à $\partial\psi_{\mathbb{R}^+}(x)$, c'est-à-dire au sous-différentiel de $\psi_{\mathbb{R}^+}$ en x , avec ψ_K la fonction indicatrice définie pour un ensemble convexe non vide K telle que :

$$\psi_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{si } x \notin K. \end{cases} \quad (2.37)$$

Une telle inclusion peut encore se reformuler à l'aide de la propriété 2.1.

Propriété 2.1. Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$x - y \in -\partial\psi_K(x) \Leftrightarrow x = \text{proj}_K(y), \quad (2.38)$$

où $\text{proj}_K(y)$ est la projection de y sur K : $x = \underset{z \in K}{\text{argmin}} \frac{1}{2} \|z - y\|^2$.

Dans le développement du schéma non régulier, la notion de problème de complémentarité linéaire (LCP, pour *Linear Complementarity Problem* en anglais) sera abordée. Il s'agit d'une forme de problème mettant en jeu une condition de complémentarité, selon la définition suivante.

Définition 2.2 (*Problème de complémentarité linéaire (LCP)*). Soient $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $q \in \mathbb{R}^n$. Le LCP associé consiste à déterminer $z \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\begin{cases} y = Mz + q \\ 0 \leq z \perp y \geq 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Nous introduisons enfin la notion de mesure différentielle. Pour ce faire, reprenons l'exemple d'une particule décrite par ses déplacement q et vitesse w , soumise à une contrainte unilatérale; par exemple, un système masse-ressort vibrant en présence d'un mur unilatéral. On a :

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t w(s) ds. \quad (2.40)$$

Si w est absolument continue, alors la relation (2.40) peut être comprise au sens classique. Cependant, à cause de la contrainte unilatérale, des impacts correspondant à des sauts de vitesse peuvent intervenir. La dynamique du système n'est ainsi pas régulière et la position n'est *a priori* pas différentiable pour tout t . On suppose alors que w est une fonction à variations bornées. On

associe à la fonction w une mesure dw , telle que :

$$\int_{[t_1, t_2]} dw = w^+(t_2) - w^-(t_1), \quad \int_{]t_1, t_2[} dw = w^-(t_2) - w^+(t_1), \quad (2.41)$$

où w^- (respectivement w^+) désigne la limite à gauche (respectivement à droite) de w .

En particulier, soit $t^* \in \mathbb{R}^+$ tel que $w^-(t^*) \neq w^+(t^*)$, par exemple à un instant d'impact. Alors $dw(t^*) = w^+(t^*) - w^-(t^*)$ correspond au saut de w à l'instant t^* , ce saut définit un choc. L'accélération est dans ce cas une mesure de Dirac.

La mesure différentielle (ou mesure de Stieltjes) dw associée à w représente l'accélération au sens des distributions. En particulier, la mesure de Lebesgue² correspond à la mesure différentielle de la fonction identité (MOREAU, 1988a). Une définition formelle est présentée dans (MOREAU, 1988a).

Nous avons jusqu'ici présenté brièvement des outils essentiels pour la suite. Pour une vision plus générale et complète des problèmes abordés, on pourra notamment se référer à (MOREAU, 1988b; MOREAU, 1988a; MONTEIRO MARQUES, 1993; ACARY et al., 2008; ACARY, 2009).

2.2.2.2 Modèle non régulier pour le contact corde/obstacle

Nous considérons à présent une corde vibrante en présence d'un obstacle ponctuel à l'abscisse x_c , affleurant la corde au repos. Le déplacement u de la corde et la force de contact f en ce point sont respectivement notés $u_c = u(x_c, t)$ et $f_c = f(x_c, t)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$. La loi de Signorini s'écrit :

$$0 \leq u_c \perp f_c \geq 0. \quad (2.42)$$

Avec cette condition seule, la solution n'est pas définie dans un système discret. Il faut ajouter une condition sur la vitesse après impact (ACARY, 2016), nous choisissons ici une loi de Newton :

$$\dot{u}_c^+ = -\varrho \dot{u}_c^- \text{ si } u_c = 0, \quad (2.43)$$

où le coefficient de restitution ϱ , tel que $0 \leq \varrho \leq 1$, définit le comportement du système au point de contact. Notons que dans (ACARY, 2016), la loi d'impact est plus précisément : $\dot{u}_c^+ = -\varrho \dot{u}_c^-$ si $u_c = 0$ et $\dot{u}_c^- \leq 0$, et ce afin de garantir un comportement énergétique cohérent du schéma employé. En effet, si la condition en vitesse est redondante en continu (hormis pour des conditions initiales telles que $\dot{u}_c^- > 0$ et $u_c = 0$), il en est autrement une fois le problème discrétisé et des injections d'énergie peuvent survenir pour $\varrho < 1$, comme nous le verrons dans la section 3.3.3.

Certains travaux de la littérature proposent des résolutions qui n'imposent pas explicitement de condition sur la vitesse après impact, et résolvent la condition de complémentarité en position (DOYEN et al., 2011). Traiter le problème en position tout en imposant la loi d'impact de Newton sur plusieurs pas de temps est proposé dans (PAOLI et al., 2002a; PAOLI et al., 2002b).

Traiter le problème en vitesse plutôt qu'en position a plusieurs intérêts. Tout d'abord, la loi d'impact apparaît explicitement et permet le contrôle des pertes au contact. De plus, il est plus aisé de contrôler le comportement énergétique, ce qui permet d'obtenir la stabilité du schéma. Toutefois, ce type de formulation autorise une légère pénétration de la corde dans l'obstacle, ce qui viole la condition en position (ACARY, 2016). Il est possible de forcer la condition en position à l'aide de diverses techniques (BAUCHAU et al., 2008; ACARY, 2009; ACARY, 2012), toutefois pour les applications que nous considérons, il n'est pas primordial de l'imposer.

2. La mesure de Lebesgue dt généralise la notion de longueur d'intervalle classique, elle est telle que $\int_{[a,b]} dt = \int_{]a,b[} dt = b - a$ pour $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Nous choisissons donc une modélisation à travers une condition en vitesse, la condition (2.42) est ainsi remplacée par :

$$\begin{cases} 0 \leq \dot{u}_c^+ + \rho \dot{u}_c^- \perp f_c \geq 0 & \text{si } u_c = 0 \\ f_c = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.44)$$

La condition de complémentarité (2.44) implique la condition de Signorini (2.42) et prend en compte la loi d'impact (ACARY et al., 2008).

De même que précédemment, dans l'optique du développement de méthodes numériques conservant une énergie discrète, on s'intéresse à l'énergie du système. Celle-ci est donnée par :

$$\tilde{\mathcal{H}}_\rho = \frac{\mu}{2} \int_0^L (u_t)^2 dx + \frac{T}{2} \int_0^L (u_x)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L (u_{xx})^2 dx \geq 0, \quad (2.45)$$

elle est conservée si $\rho = 1$, dissipée sinon.

2.2.2.3 Écriture à l'aide de mesures différentielles

Nous réécrivons ici l'équation (2.30) associée à la condition (2.44) à l'aide de mesures différentielles, car c'est sur ce formalisme que le schéma numérique que nous emploierons par la suite s'appuie.

Ainsi, le système décrivant la corde en présence d'un obstacle ponctuel peut s'écrire (ACARY et al., 2008) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{w}, & (2.46a) \\ \mu(d\mathbf{w} + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{q} dt + 2\mathbf{\Upsilon} \dot{\mathbf{q}} dt) = d\mathbf{I}, & (2.46b) \\ q(0) = q_0, \dot{q}(0) = w_0 & (2.46c) \\ 0 \leq \dot{u}_c^+ + \rho \dot{u}_c^- \perp d i_c \geq 0 & \text{si } u_c \leq 0, & (2.46d) \end{cases}$$

où l'on rappelle que le vecteur $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{N_m}]^T$ contient les amplitudes modales de la corde et où :

- la mesure dt est une mesure de Lebesgue,
- les efforts de réaction sont représentés par la variable $d\mathbf{I}$; si l'on néglige sa partie singulière elle s'écrit : $d\mathbf{I} = \tilde{\mathbf{f}} dt + \mathbf{P} d\tilde{\nu}$, où la force de contact correspond à $\tilde{\mathbf{f}} dt$ (par exemple, le contact entre un objet et une table sur laquelle il serait posé), et les percussions à $\mathbf{P} d\tilde{\nu} = \sum_m \mathbf{P}^m \delta_{t^m}$, t^m étant les instants de discontinuité de \mathbf{w} ; dans l'espace physique, ces efforts au point de contact sont représentés par $d i_c$,
- la mesure différentielle $d\mathbf{w}$ associée à \mathbf{w} peut s'écrire : $d\mathbf{w} = \ddot{\mathbf{q}} dt + (\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-) d\tilde{\nu}$.

La condition (2.46d) correspond au processus de rafle (*sweeping process* en anglais) du second ordre de Moreau (MOREAU, 1977; BROGLIATO, 1999; MONTEIRO MARQUES, 1993).

Finalement, nous avons formulé le problème non régulier à l'aide d'une condition de complémentarité et d'une loi d'impact dépendant d'un paramètre ρ . Nous avons ensuite reformulé le problème à l'aide de mesures différentielles, cette écriture sera exploitée lors de la discrétisation du système dans la section 3.3.1.

Dans la section 2.2, nous avons présenté deux modèles du contact corde/obstacle agissant sur la polarisation transversale verticale selon (Oz) , qui se distinguent en ce qu'ils régularisent ou non la force de contact. Nous souhaitons à présent compléter le modèle de corde en introduisant un modèle simple de frottement selon (Oy) lorsqu'un contact est détecté selon (Oz) . De même que pour la force de contact, deux approches sont explorées, l'une régularisante et l'autre non.

2.3 Comment modéliser les frottements corde/obstacle ?

Dans cette section, nous introduisons le déplacement selon (Oy), noté v . Les équations pour u et v sont supposées découplées lorsqu'il n'y a pas de contact. En particulier, nous ne considérerons pas de couplage entre ces deux déplacements aux extrémités. Lorsqu'un contact est détecté sur le déplacement vertical u , une force de frottement f_f est appliquée au déplacement horizontal v . L'équation continue pour le déplacement v s'écrit ainsi :

$$\mu v_{tt} - T v_{xx} + EI v_{xxxx} = f_f. \quad (2.47)$$

De même que pour la force de contact appliquée sur u (voir la section 2.2), deux méthodes sont présentées. Elles impliquent une force de frottement de Tresca régularisée ou non.

2.3.1 Force de frottement régularisée

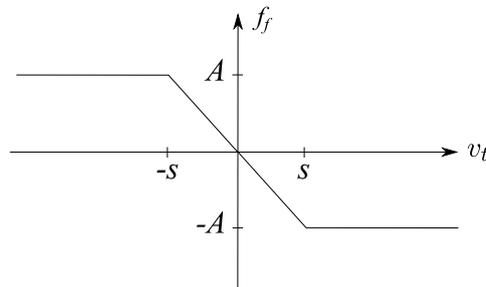


FIGURE 2.4 – Force de frottement régularisée (pour $u < g$).

Nous optons dans un premier temps pour une force f_f définie comme une loi de frottement de Tresca régularisée et qui s'écrit (voir la figure 2.4) :

$$f_f(u, v_t) = A \begin{cases} 1 & \text{si } v_t < -s \text{ et } u < g \\ -v_t/s & \text{si } |v_t| \leq s \text{ et } u < g \\ -1 & \text{si } v_t > s \text{ et } u < g \\ 0 & \text{si } u \geq g, \end{cases} \quad (2.48)$$

où v_t est la vitesse de la corde, et A (N.m^{-1}), $s > 0$ (m.s^{-1}) sont deux paramètres constants définissant la loi de frottement. Ils seront déduits d'une expérience dans la section 4.3.2.3.

L'expression de l'énergie associée à (2.47) est donnée par :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{\mu}{2} \int_0^L (v_t)^2 dx + \frac{T}{2} \int_0^L (v_x)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L (v_{xx})^2 dx \geq 0, \quad (2.49)$$

et satisfait :

$$\frac{d\tilde{\mathcal{H}}}{dt} = \tilde{\mathcal{Q}}, \quad \text{où } \tilde{\mathcal{Q}} = \int_0^L v_t f_f(u, v_t) dx < 0. \quad (2.50)$$

Ce modèle est donc dissipatif. De plus, on notera qu'il n'autorise qu'une position de repos. Dans certaines configurations, telles que les oscillations d'un pendule (THORIN, 2013), cette restriction peut aller à l'encontre des observations physiques. Dans le contexte étudié cependant, un tel contre-sens n'est *a priori* pas à craindre. Définissons à présent une approche non régulière pour la modélisation du frottement.

2.3.2 Force de frottement non régulière

Nous proposons à présent d'appliquer une force de frottement non régulière selon (Oy) lorsqu'un contact corde/obstacle est détecté selon (Oz) . La méthode employée s'appuie sur (THORIN, 2013) où elle est appliquée à un pendule (chapitre 5) et (ACARY et al., 2008) où elle est appliquée à un circuit électrique (chapitre 1).

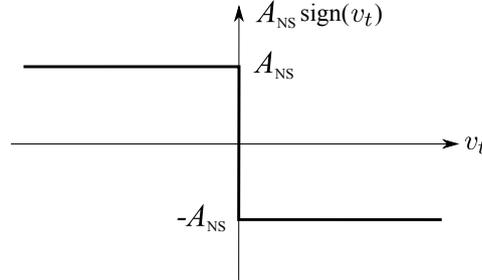


FIGURE 2.5 – Ensemble de valeurs de la force de frottement non régulière (pour $u < g$).

f_f est dans ce cas une loi de frottement de Tresca telle que (voir la figure 2.5) :

$$f_f(u, v_t) \in A_{NS} \text{sign}(-v_t) = A_{NS} \begin{cases} \{1\} & \text{si } v_t < 0 \text{ et } u < g \\ [-1, 1] & \text{si } v_t = 0 \text{ et } u < g \\ \{-1\} & \text{si } v_t > 0 \text{ et } u < g \\ \{0\} & \text{si } u \geq g, \end{cases} \quad (2.51)$$

avec A_{NS} (N.m^{-1}) un paramètre qui sera défini par rapport à l'expérience (voir la section 4.3.3).

Nous avons présenté deux modèles pour le contact corde/obstacle selon (Oz) d'une part, et le frottement selon (Oy) d'autre part, lorsqu'un contact est détecté. Les équations de ces modèles seront discrétisées dans le chapitre 3 puis les simulations seront confrontées à des résultats expérimentaux dans le chapitre 4. Avant cela, nous présentons la solution analytique pour le contact entre une corde idéale et un obstacle ponctuel, elle nous permettra de nous familiariser avec la solution d'un problème de contact corde/obstacle et servira de référence dans la suite de ce manuscrit.

2.4 Un cas idéal avec solution analytique

Dans cette section, nous proposons une première approche du contact entre une corde souple sans amortissement et un obstacle ponctuel rigide. Ce cas a l'avantage de jouir d'une solution analytique connue lorsque l'obstacle est centré et d'une relative simplicité quant à son appréhension. Il sera repris par la suite comme solution de référence.

Par souci de simplicité, et de même que dans la littérature traitant analytiquement du problème, les données sont adimensionnées : $L = T = \mu = 1$. Cela équivaut à considérer les variables $\frac{x}{L}$ et $\frac{t}{T}$ avec $\tau = \frac{\mu L^2}{T}$ au lieu des variables x et t respectivement dans l'équation (2.1). Nous considérons dans cette section des variables d'espace et de temps telles que $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et $t \in \mathbb{R}^+$. L'équation de la corde idéale s'écrit :

$$u_{tt} - u_{xx} = R, \quad (2.52)$$

où R est la réaction de l'obstacle sur la corde, l'obstacle étant ponctuel, centré et de hauteur h . Nous considérons des conditions aux limites de Dirichlet : $u(-1/2, t) = u(1/2, t) = 0, \forall t > 0$.

La corde a initialement la forme d'un triangle symétrique de hauteur 1 et une vitesse nulle : $u(x, 0) = 1 - 2|x|$ et $u_t(x, 0) = 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Le cas d'un obstacle ponctuel, et plus généralement convexe, se distingue du cas d'un obstacle concave notamment par la possibilité d'un contact persistant : pour un obstacle concave, la corde rebondit aussitôt si un contact se produit, tandis que pour un obstacle convexe, le contact peut perdurer (CABANNES, 1981; CABANNES, 1984a). La figure 2.6 présente la solution analytique en l'absence et en présence d'un obstacle ponctuel centré affleurant la corde au repos, en supposant une réflexion parfaite des ondes aux extrémités (vitesse inversée). Cette représentation espace-temps est adoptée dans divers articles dédiés à la résolution analytique du contact corde/obstacle (AMERIO, 1978; CABANNES, 1981; AMERIO, 1986; CITRINI, 1986). Pour en faciliter la lecture, nous montrons également sur la figure 2.6 la forme de la corde à des instants clés.

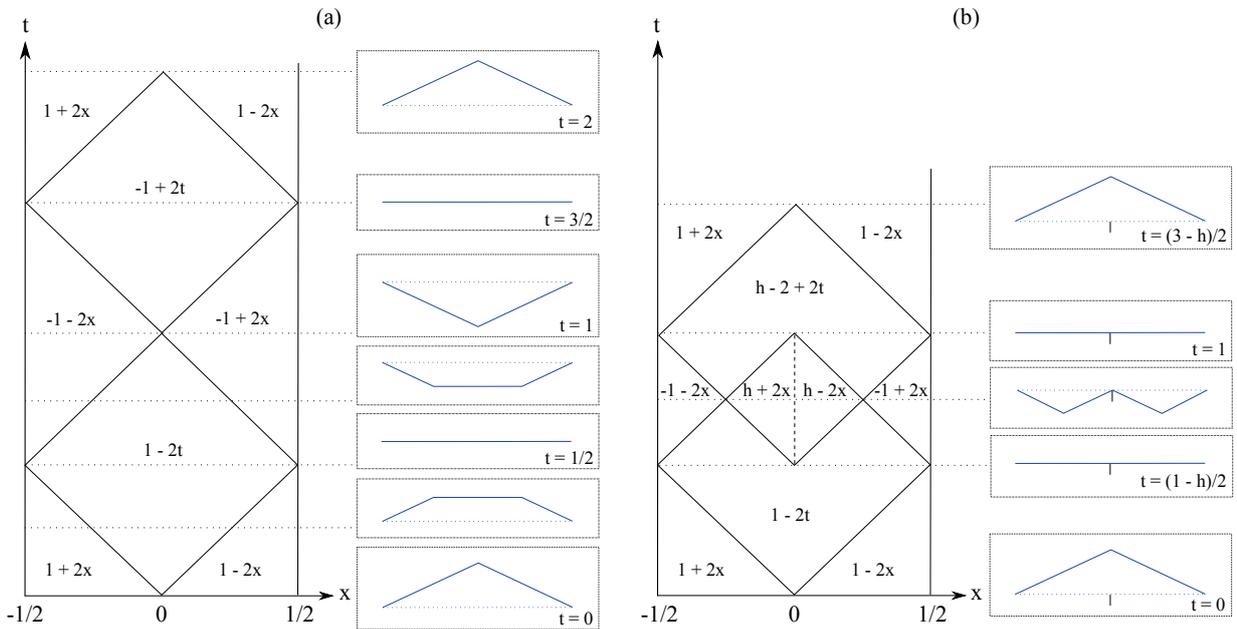


FIGURE 2.6 – Représentation sur une période de la solution de l'équation d'une corde vibrante idéale adimensionnée dans le plan $x - t$ et représentation correspondante de la corde dans le plan $x - z$ (corde en bleu et obstacle en noir) à des instants repérés par des traits pointillés. (a) Corde sans obstacle (b) Corde en présence d'un obstacle ponctuel centré de hauteur h (le cas représenté correspond au cas $h = 0$). Le trait pointillé vertical représente le contact persistant.

La période du mouvement avec l'obstacle est donnée par $T_a = \frac{3-h}{2}$ (CABANNES, 1981). Pour $h = -1$, on obtient la solution sans obstacle, de période $T_s = 2$. Pour $h = 0$, cas étudié dans le chapitre 4, on a $\frac{T_a}{T_s} = \frac{3}{4}$. La fréquence avec obstacle est donc plus élevée que la fréquence sans obstacle, pour les positions d'obstacle et de pincement considérées. Nous retrouverons expérimentalement ce mouvement de corde dans le chapitre 4.

La littérature recense un certain nombre de solutions analytiques et de résultats de périodicité ou presque-périodicité, en particulier pour des obstacles ponctuels centrés ou rectilignes, qui sont partiellement synthétisés dans l'annexe B.

À notre connaissance, ces résultats n'ont pas été étendus au cas d'un obstacle ponctuel placé à une fraction entière quelconque de la longueur de la corde. Or des comportements périodiques apparaissent dans ces cas également. Nous proposons donc ici deux résultats de périodicité que nous avons déterminés empiriquement à l'aide de constructions géométriques de solutions de ce type de problème, confortées par des simulations et expériences (voir l'annexe B).

Nous considérons une condition initiale en triangle de hauteur 1 dont nous précisons la position de pincement, sans vitesse initiale.

1^{er} résultat : Pour un pincement en $\frac{L}{2}$ et un obstacle ponctuel en $\frac{1}{2N}$, $N \in \mathbb{N}^*$, affleurant la corde au repos, le mouvement est périodique et le rapport des périodes avec et sans obstacle vaut $\frac{T_a}{T_s} = \frac{4N-1}{4N}$.

2nd résultat : Pour un pincement en $\frac{p}{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p < N$, et un obstacle ponctuel en $\frac{1}{N}$ affleurant la corde au repos, le mouvement est périodique et le rapport des périodes avec et sans obstacle vaut $\frac{T_a}{T_s} = \frac{N^2-p}{N^2}$.

La figure 2.7 illustre une période du mouvement d'une corde idéale pincée aux $\frac{2}{3}$, pour un obstacle placé au tiers. La corde revient à sa position initiale après 14 unités de temps, contre 18 en l'absence d'obstacle. Le rapport $\frac{T_a}{T_s}$ est donc donné par $\frac{14}{18} = \frac{7}{9} = \frac{3^2-2}{3^2}$. Le mouvement de la corde est détaillé plus avant dans l'annexe B.

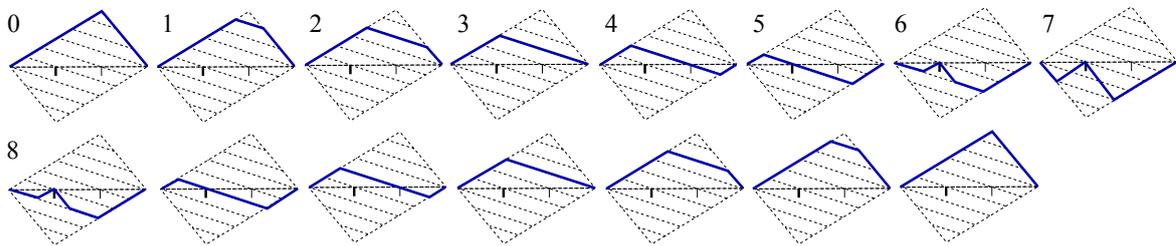


FIGURE 2.7 – Mouvement d'une corde idéale pincée aux $\frac{2}{3}$ de la corde, en présence d'un obstacle ponctuel affleurant la corde au repos au tiers de la corde, pendant une période.

Finalement, le rapport des fréquences avec et sans obstacle peut être inférieur ou supérieur à 1 en fonction des cas, si bien que l'ajout d'un obstacle ponctuel peut augmenter ou abaisser la fréquence fondamentale en fonction de sa position et du point de pincement.

La première approche du contact corde/obstacle menée dans ce paragraphe permet, à travers un exemple simple, d'apprécier la richesse des comportements induits par l'ajout d'un obstacle. Cependant des solutions analytiques ne sont disponibles que pour des obstacles simples, comme nous l'avons déjà mentionné.

2.5 Conclusion

Nous avons présenté un modèle de corde vibrante ainsi que deux approches de modélisation du contact, en incluant des frottements. Ces deux choix de modélisation reposent sur une régularisation ou non des forces impliquées et font appel à des formalismes distincts. Nous avons enfin présenté la solution analytique dans le cas d'un obstacle ponctuel centré; elle servira de référence aux modèles numériques développés dans le chapitre suivant. Ces méthodes numériques sont basées sur les modèles présentés jusqu'ici et doivent gérer la condition unilatérale de contact de manière stable et fiable. Elles ont l'avantage de s'adapter facilement à une grande diversité de configurations, elles permettent notamment de prendre en compte des effets difficiles à inclure analytiquement et de mener des études paramétriques. Elles sont, pour une corde idéale, mises en regard de la solution analytique exposée dans la section 2.4. Puis, dans les chapitres 4 et 5, une confrontation avec des signaux expérimentaux est proposée.

Chapitre 3

Méthodes numériques

L'objectif consiste ici à développer un schéma numérique pour la résolution du problème de la corde vibrante en présence d'un obstacle unilatéral décrit par l'équation (2.30) (page 20). La force de contact introduit une forte non-linéarité qui implique des difficultés, notamment concernant la stabilité des schémas numériques. Afin de garantir cette stabilité, nous cherchons à obtenir un schéma conservatif, c'est-à-dire qui conserve une énergie discrète pour une corde sans amortissement. Par ailleurs, le schéma doit permettre une représentation du mouvement de la corde fidèle à la physique du problème ; nous souhaitons en particulier éviter des artefacts tels que des amortissements ou de la dispersion numériques. De tels effets interférant avec les amortissements et dispersion physiques de la corde pourraient se montrer particulièrement nuisibles dans les applications considérées ici, car l'oreille humaine y est très sensible. Nous commençons, dans la section 3.1, par décrire un schéma exact pour un oscillateur harmonique avant de le généraliser à la corde vibrante, chaque mode se comportant comme un oscillateur. Suite à cela, nous proposons de discrétiser les modèles de contact et frottement décrits dans les sections 2.2 et 2.3. La section 3.2 est ainsi consacrée à deux schémas pour une force de contact régularisée. Ceux-ci ont été développés en partie lors d'un séjour d'un mois au sein de l'*Acoustics & Audio Group* de l'université d'Édimbourg, en collaboration avec Stefan Bilbao. Un schéma non régulier est ensuite décrit dans la section 3.3. Ce dernier a fait l'objet d'échanges avec Vincent Acary et Franck Pérignon de l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) de Grenoble. Ces deux approches, l'une régularisante et l'autre non régulière, sont mises en regard dans la section 3.4, puis une conclusion au chapitre est proposée dans la section 3.5.

3.1 Traitement de la partie linéaire

Dans cette section, nous commençons par présenter un schéma issu de la littérature, exact pour un oscillateur sans force extérieure (BILBAO, 2009). Celui-ci est utilisé par la suite dans le cas de la corde, dont chaque mode peut être assimilé à un oscillateur. L'ordre du schéma en présence d'un forçage est ensuite étudié, nous montrons en particulier qu'avec une discrétisation adéquate du second membre, le schéma peut être d'ordre aussi élevé que souhaité.

Nous introduisons en préambule les opérateurs discrets suivants, ils seront utilisés dans l'ensemble du chapitre :

$$\begin{aligned} u_i^n &= u(x_i, n\Delta t) \approx u(x_i, t^n), & \delta_{t-}u^n &= \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \approx \frac{du}{dt}(t^n), \\ \mu_t u^n &= \frac{u^{n+1} + u^{n-1}}{2} \approx u(t^n), & \delta_{t+}u^n &= \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \approx \frac{du}{dt}(t^n), \\ \mu_{t+}u^n &= \frac{u^n + u^{n+1}}{2} \approx u(t^n), & \delta_t u^n &= \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \approx \frac{du}{dt}(t^n), \\ & & \delta_{tt}u^n &= \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} \approx \frac{d^2u}{dt^2}(t^n). \end{aligned}$$

3.1.1 Oscillateur en vibration libre

Le déplacement u d'un oscillateur harmonique de pulsation ω avec des pertes gouvernées par un coefficient $\sigma \geq 0$ est régi par l'équation suivante :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u + 2\sigma \frac{du}{dt} = 0, \quad (3.1)$$

où le paramètre d'amortissement σ peut également s'écrire sous la forme $\sigma = \zeta\omega$, avec ζ un nombre sans dimension.

L'énergie de ce système a pour expression :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{\omega^2}{2} u^2. \quad (3.2)$$

En l'absence de pertes ($\sigma = 0$), l'énergie est conservée. Pour $\sigma > 0$, elle est dissipée, et l'on a l'égalité suivante, obtenue en multipliant (3.1) par $\frac{du}{dt}$:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -2\sigma \left(\frac{du}{dt} \right)^2. \quad (3.3)$$

Le problème est donc conservatif en l'absence de pertes, dissipatif sinon. Nous souhaitons retrouver cette propriété sur le schéma numérique, afin de garantir de bonnes propriétés de stabilité.

Une famille de schémas numériques d'ordre 2 permettant de résoudre l'équation (3.1) est (BILBAO, 2009) :

$$\delta_{tt}u^n + \omega^2(\alpha + (1 - \alpha)\mu_t)u^n + 2\sigma^* \delta_t u^n = 0, \quad (3.4)$$

avec α un réel quelconque, $\sigma^* \geq 0$ et $u^n = u(t^n)$, où $t^n = n\Delta t$ pour n un entier positif, Δt étant le pas de temps, supposé constant.

Soient les valeurs suivantes des paramètres :

$$\alpha = \frac{2}{\omega\Delta t^2} - \frac{A}{1 + e^{-2\sigma\Delta t} - A}$$

$$\sigma^* = \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\omega^2\Delta t}{2} - \alpha \frac{\omega^2\Delta t}{2} \right) \frac{1 - e^{-2\sigma\Delta t}}{1 + e^{-2\sigma\Delta t}},$$

avec $A = e^{-\sigma\Delta t} \left(e^{\sqrt{\sigma^2 - \omega^2}\Delta t} + e^{-\sqrt{\sigma^2 - \omega^2}\Delta t} \right)$.

Alors, en suivant le raisonnement décrit dans (BILBAO, 2009), on peut montrer que le schéma (3.4) se réécrit :

$$u^{n+1} - e^{-\sigma\Delta t} \left(e^{\sqrt{\sigma^2 - \omega^2}\Delta t} + e^{-\sqrt{\sigma^2 - \omega^2}\Delta t} \right) u^n + e^{-2\sigma\Delta t} u^{n-1} = 0. \quad (3.5)$$

Ce schéma est exact, c'est-à-dire que la solution issue de ce schéma est égale à la solution de l'équation continue (3.1) quel que soit le pas de temps, pourvu que les conditions initiales soient exactes (BILBAO, 2009). Ce schéma est particulièrement intéressant car il peut être étendu au cas de la corde vibrante (voir la section 3.1.3) et permet d'éviter tout effet de dispersion numérique non physique pendant les phases de vol libre.

De plus, l'énergie discrète, obtenue en multipliant l'équation (3.4) par $\delta_t u^n$, est donnée par :

$$H^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\delta_t u^n)^2 + \frac{\omega^2}{2} (\alpha u^n u^{n+1} + (1 - \alpha)\mu_{t+} ((u^n)^2)). \quad (3.6)$$

Elle vérifie :

$$\delta_t H^{n+\frac{1}{2}} = -2\sigma^*(\delta_t u^n)^2, \quad (3.7)$$

le schéma est donc conservatif en l'absence de pertes, dissipatif sinon. Il constitue donc une excellente base à laquelle accoler le traitement de la force de contact. Nous proposons à présent d'étudier l'ordre de ce schéma lorsque l'oscillateur est soumis à une force extérieure.

3.1.2 Ordre du schéma avec forçage

Dans cette section, le problème de l'oscillateur exposé dans la section 3.1.1 est étendu par l'ajout d'un second membre. Nous avons vu que sans second membre, le schéma (3.5) était exact. Cependant, la présence d'une force extérieure rend cette assertion fautive *a priori*. Nous étudions donc ici l'ordre du schéma pour un oscillateur forcé. Nous verrons qu'en choisissant une expression judicieuse de la force discrète, le schéma peut être d'ordre aussi élevé que souhaité.

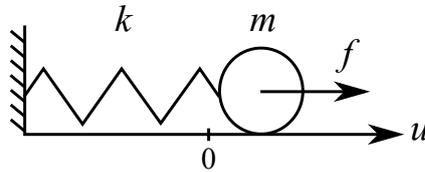


FIGURE 3.1 – Système masse-ressort, pour une masse m et un ressort de raideur k .

Nous nous intéressons ainsi au problème suivant, dans lequel nous n'incluons pas d'amortissement pour simplifier les expressions en jeu, et pour un déplacement initial u_0 et une vitesse initiale v_0 donnés :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = f, \quad (3.8)$$

où f est une force extérieure que l'on suppose régulière, connue et indépendante de u pour simplifier l'étude. Cette équation peut par exemple modéliser un système masse-ressort avec une masse m , fixée à un ressort de raideur k , sur laquelle s'exercerait une force f (voir la figure 3.1).

Prenons par exemple $f = F \cos(\omega_1 t)$ avec $\omega \neq \omega_1$ et une vitesse initiale nulle, la solution du problème est alors : $u(t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{F}{\omega^2 - \omega_1^2} \cos(\omega_1 t)$.

Nous discrétisons l'équation 3.8 à l'aide du schéma présenté dans la section 3.1.1, en omettant les pertes et en ajoutant la contribution d'une force extérieure. Les termes exponentiels se réduisent alors à un cosinus, et le schéma se simplifie en l'expression suivante :

$$\frac{1}{\Delta t^2} (u^{n+1} - 2 \cos(\omega \Delta t) u^n + u^{n-1}) = f^n. \quad (3.9)$$

Nous allons à présent chercher à déterminer l'ordre de ce schéma. Pour ce faire, nous rappelons tout d'abord les développements de Taylor suivants, dont les calculs exposés par la suite découlent :

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u(t^n + \Delta t) = u^n + \Delta t \frac{du^n}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u^n}{dt^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{d^3 u^n}{dt^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{d^4 u^n}{dt^4} + O(\Delta t^5), \\ u^{n-1} &= u(t^n - \Delta t) = u^n - \Delta t \frac{du^n}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u^n}{dt^2} - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{d^3 u^n}{dt^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{d^4 u^n}{dt^4} + O(\Delta t^5), \\ u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1} &= \Delta t^2 \frac{d^2 u^n}{dt^2} + \frac{\Delta t^4}{12} \frac{d^4 u^n}{dt^4} + O(\Delta t^6), \\ \cos(\omega \Delta t) &= 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} + \frac{\omega^4 \Delta t^4}{24} + O(\Delta t^6). \end{aligned}$$

Nous considérons deux expressions discrètes de la force extérieure f . La première est simplement $f^n = F \cos(\omega_1 n \Delta t)$. Dans ce cas, le schéma (3.9) est d'ordre 2, car :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2}(u^{n+1} - 2 \cos(\omega \Delta t)u^n + u^{n-1}) - f^n &= \frac{1}{\Delta t^2}(u^{n+1} - (2 - \omega^2 \Delta t^2)u^n + u^{n-1}) - f^n \\ &= \frac{d^2 u^n}{dt^2} + \omega^2 u^n - f^n + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

À présent, développons à l'ordre 4 et au temps t^n l'expression $\frac{1}{\Delta t^2}(u^{n+1} - 2 \cos(\omega \Delta t)u^n + u^{n-1})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2}(u^{n+1} - 2 \cos(\omega \Delta t)u^n + u^{n-1}) &= \frac{1}{\Delta t^2}(u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1} + \omega^2 \Delta t^2 u^n - \frac{1}{12} \omega^4 \Delta t^4 u^n) \\ &= \frac{1}{\Delta t^2}(\Delta t^2 \frac{d^2 u^n}{dt^2} + \frac{\Delta t^4}{12} \frac{d^4 u^n}{dt^4} + \omega^2 \Delta t^2 u^n - \frac{1}{12} \omega^4 \Delta t^4 u^n + O(\Delta t^6)) \\ &= \frac{d^2 u^n}{dt^2} + \omega^2 u^n + \frac{\Delta t^2}{12} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) u^n + O(\Delta t^4) \\ &= \left[1 + \frac{\Delta t^2}{12} \left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) \right] \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) u^n + O(\Delta t^4). \end{aligned}$$

Si l'on choisit pour second membre $\tilde{f} = \left[1 + \frac{\Delta t^2}{12} \left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) \right] f$ au lieu de f , alors on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2}(u^{n+1} - 2 \cos(\omega \Delta t)u^n + u^{n-1}) - \tilde{f}^n &= \left[1 + \frac{\Delta t^2}{12} \left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) \right] \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) u^n + O(\Delta t^4) - \left[1 + \frac{\Delta t^2}{12} \left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) \right] f^n \\ &= \left[1 + \frac{\Delta t^2}{12} \left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) \right] \left[\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) u^n - f^n \right] + O(\Delta t^4). \end{aligned}$$

Un schéma d'ordre 4 pour la résolution de l'équation (3.8) est donc donné par :

$$\frac{1}{\Delta t^2}(u^{n+1} - 2 \cos(\omega \Delta t)u^n + u^{n-1}) = \tilde{f}^n. \quad (3.10)$$

Soient $\mathcal{K} = \left[1 + \frac{\Delta t^2}{12} \left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) \right]$ et $\mathcal{X} = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) u^n - f^n + O(\Delta t^4)$. L'assertion précédente n'est valable que si \mathcal{X} n'appartient pas au noyau de \mathcal{K} . En supposant $\frac{d^2 \mathcal{X}}{dt^2}$ bornée, cela est vérifié lorsque le pas de temps tend vers zéro, car on a alors $\mathcal{K} \rightarrow 1$. Notons toutefois que cette assertion peut *a priori* être mise en défaut si le pas de temps est trop grand, situation qui demanderait alors une étude plus approfondie afin de déterminer la borne exacte, en termes de pas de temps, pour laquelle des cas pathologiques pourraient apparaître.

On peut de la même façon obtenir un schéma d'ordre supérieur, en considérant des séries de Taylor à un ordre supérieur.

La figure 3.2 présente l'erreur commise par le schéma (3.9) pour chacun des deux choix de discrétisation du terme de force, ainsi que pour une force \tilde{f} pour laquelle le raisonnement est mené jusqu'à l'ordre 6 :

$$\tilde{f} = \left[1 + \frac{\Delta t^2}{12} \left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) + \frac{\Delta t^4}{360} \left(\frac{d^4}{dt^4} - \frac{d^2}{dt^2} \omega^2 + \omega^4 \right) \right] f. \quad (3.11)$$

Les paramètres des simulations sont les suivants : $T = 1$ s, $u_0 = 0.1$ m, $v_0 = 0$ m.s⁻¹, $\omega = 2\pi \times 100$ rad.s⁻¹, $\omega_1 = 2\pi \times 120$ rad.s⁻¹ et $F = 10^5$ N.

L'erreur a pour expression $e = \frac{\|u_{\text{num}}(t) - u_{\text{exacte}}(t)\|_{L^2}}{\|u_{\text{exacte}}(t)\|_{L^2}}$, avec u_{num} la solution obtenue *via* les schémas numériques et u_{exacte} la solution analytique. On retrouve les ordres 2, 4 et 6 pour les schémas impliquant respectivement f^n , \tilde{f}^n et $\tilde{\tilde{f}}^n$.

Ainsi, les cas éventuels où une perte d'ordre interviendrait à cause d'un terme présent dans le noyau de l'opérateur \mathcal{K} n'ont pas été observés dans le cadre de notre étude.

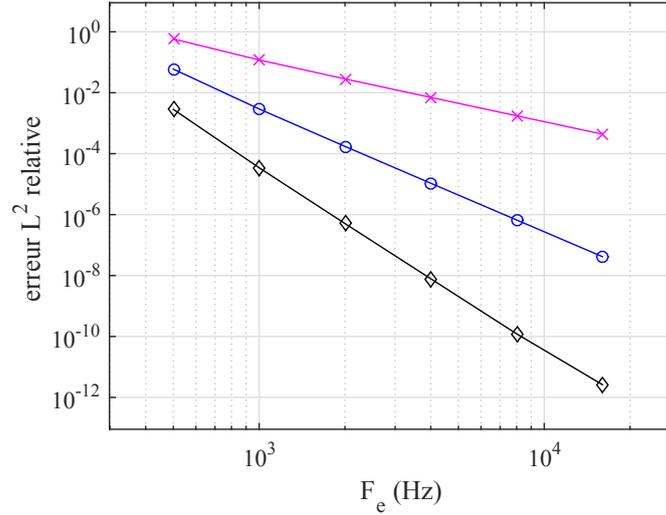


FIGURE 3.2 – Courbes de convergence du schéma (3.9), pour les seconds membres f^n (trait et croix magentas), \tilde{f}^n (trait et cercles bleus) et $\tilde{\tilde{f}}^n$ (trait et losanges noirs).

Nous avons ainsi présenté un schéma numérique exact pour l'oscillateur libre, et avons discuté son ordre dans le cas d'un forçage. Nous proposons à présent d'étendre ce schéma au cas de la corde vibrante décrite par N_m modes.

3.1.3 Extension à N_m degrés de liberté

Le schéma exact exposé dans le cas de l'oscillateur peut aisément s'étendre à un ensemble de N_m oscillateurs découplés, et en particulier à la corde dont chaque mode est représenté par un oscillateur harmonique amorti. Ce choix de discrétisation se justifie par la précision de la description du contenu fréquentiel et la stabilité de ce schéma exact. Celui-ci permet d'éviter des écueils tels que des amortissements non physiques et de la dispersion numérique (YOONG et al., 2017).

Ainsi, le schéma temporel pour la partie linéaire de l'équation (2.16) (page 15) peut s'écrire :

$$\frac{\mu}{\Delta t^2} (\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{C}\mathbf{q}^n + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{q}^{n-1}) = \mathbf{0}, \quad (3.12)$$

où $\mathbf{q}^n = [q_1^n, \dots, q_{N_m}^n]^T$ est le vecteur des coefficients modaux et \mathbf{C} , $\tilde{\mathbf{C}}$ sont des matrices diagonales de coefficients :

$$C_{ii} = e^{-\sigma_i \Delta t} \left(e^{\sqrt{\sigma_i^2 - \omega_i^2} \Delta t} + e^{-\sqrt{\sigma_i^2 - \omega_i^2} \Delta t} \right), \quad (3.13)$$

$$\tilde{C}_{ii} = e^{-2\sigma_i \Delta t}. \quad (3.14)$$

En l'absence de force extérieure, le schéma est exact (voir la section 3.1.1), assurant de ce fait l'évaluation discrète de la plus grande précision pour la partie linéaire.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous appuyons sur le schéma (3.12) pour discrétiser la partie linéaire de l'équation (2.30) (page 20) et nous nous attachons à discrétiser la force de contact. En ajoutant sa contribution à l'équation (3.12), celle-ci devient :

$$\frac{\mu}{\Delta t^2}(\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{C}\mathbf{q}^n + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{q}^{n-1}) = \mathbf{F}^n. \quad (3.15)$$

Le terme \mathbf{F}^n couple l'ensemble des modes. Cela introduit une difficulté majeure dans le traitement numérique de l'équation. Nous proposons des schémas numériques permettant de traiter le terme de force de l'équation (3.15) en régularisant la force de contact dans un premier temps, puis en considérant une méthode non régulière. Nous verrons dans la section 3.2 que deux stratégies différentes peuvent être mises en œuvre pour traiter le couplage des modes lié à la force de contact, dans le cas régularisant.

3.2 Méthodes régularisantes

Nous développons, dans ce qui suit, deux schémas numériques pour la résolution de l'équation (3.15), en nous appuyant sur les descriptions régularisées de la force décrite dans la section 2.2.1 et de la force de frottement décrite dans la section 2.3.1. Les deux méthodes proposées se distinguent en ce que l'une opère intégralement dans l'espace modal, tandis que l'autre, si elle est également basée sur une approche modale, opère dans l'espace physique. Cette dernière méthode est par conséquent dite « mixte ». Notons qu'un schéma numérique s'appuyant également sur une approche modale pour ce type de problème a été mis en place concomitamment par VAN WALSTIJN et al. (2016a) et VAN WALSTIJN et al. (2016b). Nous avons eu connaissance de ces travaux se rapprochant du schéma mixte que nous avons développé après avoir publié les actes de conférences (ISSANCHOU et al., 2016b ; ISSANCHOU et al., 2016a) et soumis un article (ISSANCHOU et al., 2017a) à ce sujet.

3.2.1 Méthode mixte

Dans cette section, la force de contact régularisée est traitée dans l'espace physique. Pour ce faire, une discrétisation de l'espace est tout d'abord introduite.

3.2.1.1 Discrétisation spatiale

Nous introduisons ici une grille spatiale ainsi qu'une relation linéaire entre les coordonnées modales et le déplacement de la corde aux points de la grille. La grille est définie par $x_i = i\Delta x$, où $\Delta x = \frac{L}{N}$ est le pas spatial et $i \in \{0, \dots, N\}$. Puisque $u(x_0, t) = 0$ et $u(x_N, t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$, seules les valeurs de u aux points de la grille d'indices $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ seront examinées dans la suite.

Nous prendrons $N_m = N-1$ de manière à ce que le nombre de points intérieurs de la grille spatiale corresponde au nombre de modes de la troncature. L'expansion modale de $u(x, t)$ peut alors être exprimée en chaque point $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ de la grille comme :

$$u(x_i, t) = u_i(t) = \sum_{j=1}^{N-1} q_j(t) \phi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{N-1} q_j(t) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{j\pi i}{N}\right). \quad (3.16)$$

Cette relation peut être écrite sous forme matricielle : $\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{q}$, avec $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_{N-1}]^T$ et $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_{N-1}]^T$.

La matrice \mathbf{S} a pour coefficients $S_{ij} = \phi_j(x_i), \forall (i, j) \in \{1, \dots, N-1\}^2$, et grâce à la relation

d'orthonormalité des modes (voir l'équation (2.10), page 14), elle vérifie :

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{L}{N} \mathbf{S}^T. \quad (3.17)$$

Si l'on emploie un pas spatial variable, la structure des matrices impliquées en est modifiée ; en particulier, la relation (3.17) n'est plus satisfaite.

3.2.1.2 Discrétisation temporelle

Pour déterminer la force de contact dans le domaine spatial, l'équation (3.15) est réécrite en déplacement à l'aide de la relation $\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{q}$:

$$\frac{\mu}{\Delta t^2} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{D}\mathbf{u}^n + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u}^{n-1}) = \mathbf{f}^n, \quad (3.18)$$

avec $\mathbf{D} = \Delta x \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{S}^T$ et $\tilde{\mathbf{D}} = \Delta x \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{S}}^T$.

L'approximation discrète de la force de contact (cf équation (2.26) page 19) doit permettre l'obtention d'un schéma conservatif, d'après les objectifs que nous nous sommes fixés. Pour cette raison, nous choisissons d'employer le terme utilisé dans (BILBAO et al., 2015) dans le cadre d'une discrétisation en différences finies de l'équation de la corde avec contact unilatéral :

$$\mathbf{f}^n = \frac{\delta_{t-} \psi^{n+\frac{1}{2}}}{\delta_t \eta^n}, \quad (3.19)$$

où $\psi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\psi^{n+1} + \psi^n)$ et $\psi^n = \psi(\eta^n)$, ψ étant définie par l'équation (2.27), page 19. Le schéma résultant est conservatif en l'absence de pertes, dissipatif sinon (voir la section 3.2.1.3).

En posant $\mathbf{r} = \eta^{n+1} - \eta^{n-1}$ l'inconnue (avec $\eta^n = \mathbf{g} - \mathbf{u}^n$), $\mathbf{a} = \eta^{n-1}$, $m = \frac{\Delta t^2}{\mu}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{D}\mathbf{u}^n - (\tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{I}_{N-1})\mathbf{u}^{n-1}$, l'équation non linéaire (3.18) à résoudre à chaque pas de temps peut se réécrire :

$$\mathbf{r} + \mathbf{b} + m \frac{\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) - \psi(\mathbf{a})}{\mathbf{r}} = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

L'algorithme de Newton-Raphson peut être employé pour la résolution de cette équation. Celle-ci a une unique solution, cependant la convergence de l'algorithme n'est pas garantie et dépend de la valeur initiale (BILBAO et al., 2015). On notera que dans le cas spécifique d'une force de contact linéaire (*i.e.* $\alpha = 1$), une solution analytique peut être calculée, comme détaillé dans (BILBAO, 2014). De plus, une contribution récente propose, au travers de choix d'opérateurs de discrétisation temporelle spécifiques, une méthode ne faisant pas appel à un algorithme itératif pour traiter ce type de problème (DUCCESCHI, 2017).

Le terme supplémentaire d'amortissement $\frac{du}{dt} K\beta[\eta]_+^\alpha$ dû au contact (voir l'équation (2.29)) peut être discrétisé avec l'approximation $\delta_t \mathbf{u}^n K\beta[\eta^n]_+^\alpha$ (BILBAO et al., 2015). Au lieu de (3.20), l'équation à résoudre à chaque pas de temps est alors :

$$(\mathbf{I}_{N-1} + \mathbf{L})\mathbf{r} + \mathbf{b} + m \frac{\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) - \psi(\mathbf{a})}{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad (3.21)$$

où \mathbf{L} est une matrice diagonale telle que $L_{ii} = \frac{\Delta t}{2\mu} K\beta[\eta_i^n]_+^\alpha$.

3.2.1.3 Étude de stabilité

Cette section est consacrée à l'étude de stabilité du schéma numérique (3.18). Pour cette étude, il s'avère plus commode de réécrire l'équation (3.18) en utilisant explicitement les opérateurs de discrétisation temporelle.

Nous reprenons tout d'abord l'équation (3.15) sur les déplacements modaux, dont une représentation équivalente s'écrit :

$$\mu \left[\check{\mathbf{C}}_1 \delta_{tt} \mathbf{q}^n + \check{\mathbf{C}}_2 \mathbf{q}^n + \check{\mathbf{C}}_3 \delta_t \mathbf{q}^n \right] = \mathbf{F}^n, \quad (3.22)$$

avec $\check{\mathbf{C}}_1$, $\check{\mathbf{C}}_2$ et $\check{\mathbf{C}}_3$ des matrices diagonales telles que :

$$\begin{aligned} \check{C}_{1ii} &= \frac{1 + (1 - \gamma_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2}}{1 + (1 - \gamma_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2} + \sigma_i^* \Delta t}, \\ \check{C}_{2ii} &= \frac{\omega_i^2}{1 + (1 - \gamma_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2} + \sigma_i^* \Delta t}, \\ \check{C}_{3ii} &= \frac{2\sigma_i^*}{1 + (1 - \gamma_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2} + \sigma_i^* \Delta t}. \end{aligned}$$

Les coefficients γ_i et σ_i^* sont donnés par :

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{2}{\omega_i^2 \Delta t^2} - \frac{A_i}{1 + e_i - A_i}, \\ \sigma_i^* &= \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\omega_i^2 \Delta t}{2} - \gamma_i \frac{\omega_i^2 \Delta t}{2} \right) \frac{1 - e_i}{1 + e_i}, \end{aligned}$$

avec :

$$A_i = e^{-\sigma_i \Delta t} \left(e^{\sqrt{\sigma_i^2 - \omega_i^2} \Delta t} + e^{-\sqrt{\sigma_i^2 - \omega_i^2} \Delta t} \right) \text{ et } e_i = e^{-2\sigma_i \Delta t}. \quad (3.23)$$

Le schéma équivalent sur le déplacement \mathbf{u} s'écrit donc :

$$\mu \left[\check{\mathbf{D}}_1 \delta_{tt} \mathbf{u}^n + \check{\mathbf{D}}_2 \mathbf{u}^n + \check{\mathbf{D}}_3 \delta_t \mathbf{u}^n \right] = \mathbf{f}^n, \quad (3.24)$$

où $\check{\mathbf{D}}_1 = \Delta x \mathbf{S} \check{\mathbf{C}}_1 \mathbf{S}^T$, $\check{\mathbf{D}}_2 = \Delta x \mathbf{S} \check{\mathbf{C}}_2 \mathbf{S}^T$ et $\check{\mathbf{D}}_3 = \Delta x \mathbf{S} \check{\mathbf{C}}_3 \mathbf{S}^T$ sont des matrices symétriques. Le terme de force est donné par l'équation (3.19).

Nous introduisons à présent le produit scalaire discret suivant, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \Delta x \sum_{j \in \{0, \dots, N\}} u_j v_j. \quad (3.25)$$

En appliquant le produit scalaire ainsi défini à l'équation (3.24) et $\delta_t \mathbf{u}^n$, on obtient l'égalité d'énergie suivante :

$$\delta_{t-} H^{n+\frac{1}{2}} = -\mu \langle \delta_t \mathbf{u}^n, \check{\mathbf{D}}_3 \delta_t \mathbf{u}^n \rangle, \quad (3.26)$$

avec :

$$H^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{2} \langle \delta_{t+} \mathbf{u}^n, \check{\mathbf{D}}_1 \delta_{t+} \mathbf{u}^n \rangle + \frac{\mu}{2} \langle \mathbf{u}^{n+1}, \check{\mathbf{D}}_2 \mathbf{u}^n \rangle + \langle \psi^{n+\frac{1}{2}}, 1 \rangle. \quad (3.27)$$

Comme $\check{\mathbf{D}}_3$ est semi-définie positive (voir l'annexe C, propriété C.3), le schéma est dissipatif. Il est donc stable si l'énergie est positive.

Le potentiel de force étant positif, et étant données les propriétés C.1 et C.3 démontrées dans l'annexe C, la condition de stabilité peut être réécrite comme suit :

$$\left\langle \delta_{t+} \mathbf{u}^n, \left(\check{\mathbf{D}}_1 - \frac{\Delta t^2}{4} \check{\mathbf{D}}_2 \right) \delta_{t+} \mathbf{u}^n \right\rangle \geq 0. \quad (3.28)$$

Il suffit donc de montrer que $(\check{\mathbf{D}}_1 - \frac{\Delta t^2}{4} \check{\mathbf{D}}_2)$ est semi-définie positive pour obtenir la stabilité,

ce qui est vérifié si $(\check{C}_1 - \frac{\Delta t^2}{4} \check{C}_2)$ est semi-définie positive. Ainsi, la condition suffisante s'écrit, $\forall i \in \{1, \dots, N-1\}$:

$$\gamma_i \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{\omega_i^2 \Delta t^2}. \quad (3.29)$$

Après une manipulation simple, la condition devient :

$$\frac{1 + e_i + A_i}{1 + e_i - A_i} \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, N-1\}. \quad (3.30)$$

L'équation (3.30) est vérifiée si $1 + e_i \pm A_i > 0$, ce qui est toujours vrai (cf la propriété C.2 de l'annexe C), le schéma est donc inconditionnellement stable. Le cas limite $\sigma_i = 0$ correspond à la corde non amortie. Dans ce cas γ_i se réduit à :

$$\gamma_i = \frac{2}{\omega_i^2 \Delta t^2} - \frac{\cos(\omega_i \Delta t)}{1 - \cos(\omega_i \Delta t)},$$

et la stabilité inconditionnelle en résulte, de même que dans le cas amorti.

Si l'on considère des pertes au contact (voir l'équation (3.21)), on obtient l'égalité d'énergie discrète suivante :

$$\delta_{t-} H^{n+\frac{1}{2}} = -\mu \langle \delta_t \mathbf{u}^n, \check{D}_3 \delta_t \mathbf{u}^n \rangle - \langle \delta_t \mathbf{u}^n, \delta_t \mathbf{u}^n K \beta [\boldsymbol{\eta}^n]_+^\alpha \rangle. \quad (3.31)$$

Comme $\langle \delta_t \mathbf{u}^n, \delta_t \mathbf{u}^n K \beta [\boldsymbol{\eta}^n]_+^\alpha \rangle \geq 0$, ce terme apporte de la dissipation supplémentaire et la stabilité du schéma n'est pas affectée.

Remarquons que la construction du schéma mixte ne nécessite *a priori* pas l'hypothèse $N_m = N-1$ car $\Delta x \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}_{N_m \times N_m}$, si bien que le passage de l'espace physique à l'espace modal peut être opéré sans difficulté supplémentaire. Cependant, la force de contact n'étant exprimée que dans l'espace physique et appliquée qu'au(x) point(s) de contact, un déséquilibre se crée entre le nombre de modes représentant la corde et la représentation spatiale de la corde discrète lorsqu'il y a contact. Si l'obstacle est ponctuel par exemple, et qu'à une itération donnée un contact est détecté, un seul point de la corde est modifié à cause de l'obstacle. Pour $N_m = 1 < N-1 = 100$ par exemple (voir la figure 3.3, obtenue avec les paramètres de simulation décrits dans la section 3.2.1.7), l'aberration apparaît clairement : la corde se réduit à un seul oscillateur, cependant sa description spatiale implique une déformation en conflit avec sa représentation à un mode.

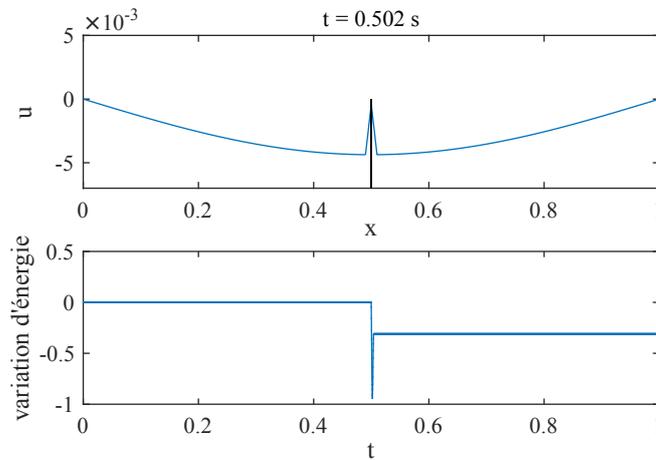


FIGURE 3.3 – En haut : forme de la corde représentée avec un seul mode peu après le premier contact avec l'obstacle, pour $N = 100$. En bas : variation relative de l'énergie $\frac{H^{n+1/2} - H^{1/2}}{H^{1/2}}$.

Ce décalage entre la déformation locale (d'autant plus que le maillage est fin) occasionnée par l'obstacle ponctuel et le nombre de modes représenté dans la matrice \mathbf{S} aboutit à un échec de la conservation d'énergie. C'est pourquoi nous considérons $N_m = N - 1$ modes. Un schéma opérant intégralement dans l'espace modal est présenté dans la section 3.2.2, dont le nombre de modes n'est pas contraint par une discrétisation spatiale.

3.2.1.4 Prise en compte des deux polarisations transversales

Pour discrétiser l'équation (2.47) avec la force de frottement décrite par (2.48) (page 24) régissant le mouvement de la corde selon (Oy) , nous appliquons la méthode proposée pour le contact entre une corde et un archet dans (BILBAO, 2009). On obtient ainsi :

$$\frac{\mu}{\Delta t^2} (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{D}\mathbf{v}^n + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{v}^{n-1}) = f_f(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\xi}^n), \quad (3.32)$$

où $\boldsymbol{\xi}^n = \delta_t \mathbf{v}^n$ est la vitesse de la corde, solution de l'équation suivante :

$$-\mathbf{D}\mathbf{v}^n + (\tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{I}_{N-1})\mathbf{v}^{n-1} + 2\Delta t \boldsymbol{\xi}^n - \frac{\Delta t^2}{\mu} f_f(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\xi}^n) = 0. \quad (3.33)$$

L'énergie discrète peut s'écrire :

$$\tilde{H}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{2} \langle \delta_{t+} \mathbf{v}^n, \check{\mathbf{D}}_1 \delta_{t+} \mathbf{v}^n \rangle + \frac{\mu}{2} \langle \mathbf{v}^{n+1}, \check{\mathbf{D}}_2 \mathbf{v}^n \rangle, \quad (3.34)$$

elle satisfait :

$$\delta_{t-} \tilde{H}^{n+\frac{1}{2}} = -\mu \langle \delta_t \mathbf{v}^n, \check{\mathbf{D}}_3 \delta_t \mathbf{v}^n \rangle + \langle \delta_t \mathbf{v}^n, f_f(\mathbf{u}^n, \delta_t \mathbf{v}^n) \rangle. \quad (3.35)$$

$\delta_t \mathbf{v}^n$ et $f_f(\delta_t \mathbf{v}^n)$ étant de signes opposés, le schéma est à nouveau dissipatif.

3.2.1.5 Étude de convergence

Le contact entre une corde vibrante et un obstacle fournit de l'énergie aux fréquences élevées. Afin d'éviter un repliement de spectre, la fréquence d'échantillonnage F_e doit être choisie en conséquence ; la nécessité d'un sur-échantillonnage est mentionnée dans (CHATZIOANNOU et al., 2015). Dans cette section, nous proposons une étude de convergence du schéma mixte afin de déterminer la fréquence d'échantillonnage que nous emploierons par la suite. Nous présentons ici le cas d'une corde vibrante en présence d'un obstacle ponctuel centré.

La corde étudiée est une corde de guitare électrique dont les propriétés sont précisées dans le tableau 4.1 (page 66) de la section 4.1 consacrée à une étude expérimentale du contact corde/obstacle. Ces propriétés résultent en une fréquence fondamentale d'environ 196 Hz. La condition initiale en déplacement est un triangle symétrique de hauteur $u_{0,max} = 1.8$ mm et dont le sommet au point de pincement est arrondi en ne considérant que les 50 premiers modes. La vitesse initiale est nulle. Les simulations sont conduites pour des valeurs de F_e de 1960 Hz à $2^{11} \times 1960$ Hz ≈ 4 MHz.

Les courbes de convergence sont présentées sur la figure 3.4 pour 1 et 1001 points intérieurs (*i.e.* $N = 2$ et $N = 1002$ respectivement), dans le cas d'un obstacle ponctuel centré. Les cas d'une corde non amortie et amortie sont présentés pour $N = 2$, mais seul ce dernier cas est considéré pour $N = 1002$. Les simulations sont effectuées sur 3 s, durée sur laquelle données numériques et expérimentales sont comparées dans le chapitre 4, et sur laquelle des contacts interviennent. Les tests de convergence en sont d'autant plus stricts. L'erreur L^2 relative est définie comme :

$$e_r = \left(\frac{\sum_{t \in \tau} (s_{\text{réf}}(t) - s_{\text{courant}}(t))^2}{\sum_{t \in \tau} (s_{\text{réf}}(t))^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.36)$$

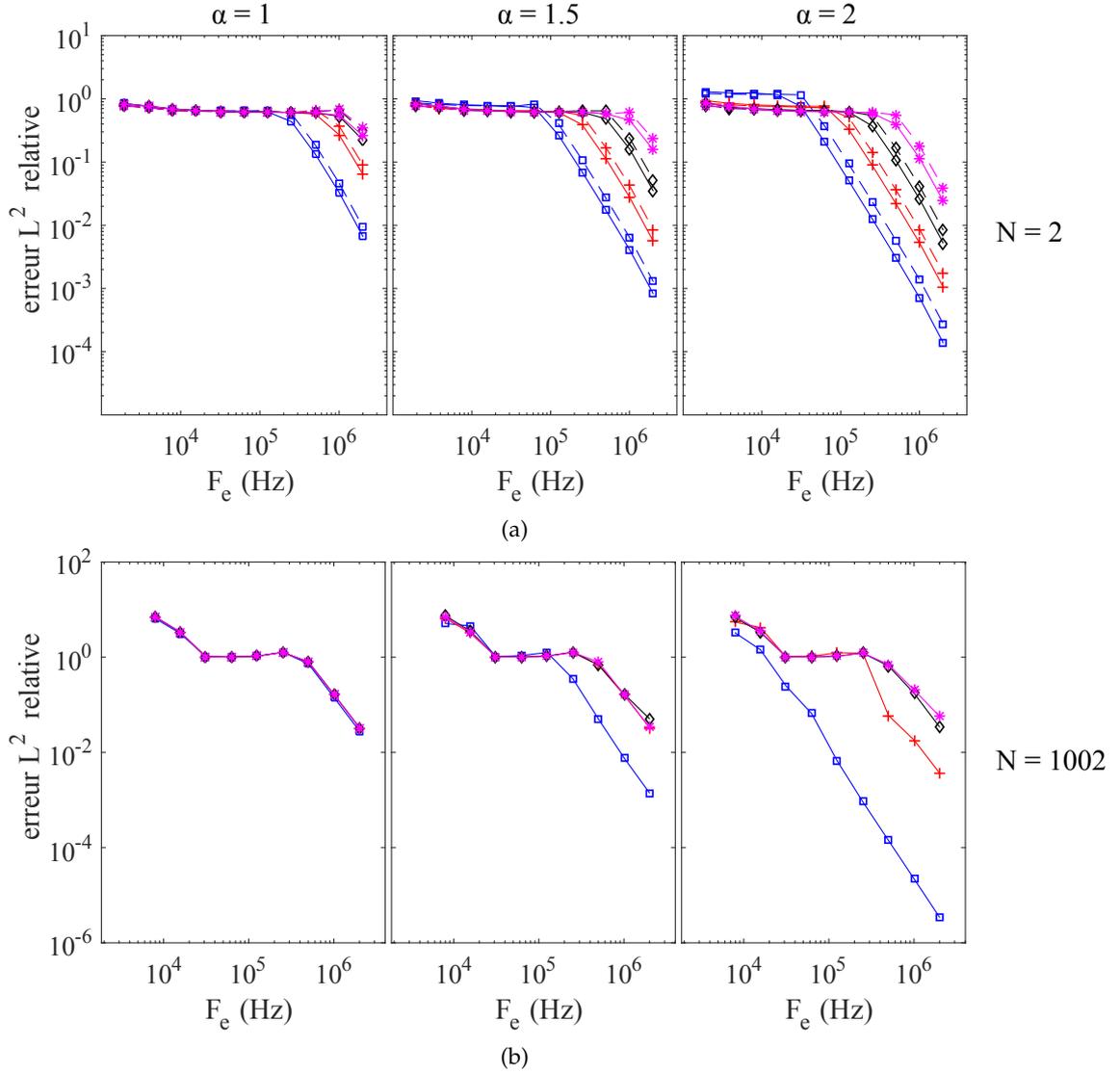


FIGURE 3.4 – Courbes de convergence L^2 sur des signaux de 3 s. À gauche : $\alpha = 1$, au centre : $\alpha = 1.5$, à droite : $\alpha = 2$. $K = 10^7$ (traits et carrés bleus), $K = 10^9$ (traits et signes plus rouges), $K = 10^{11}$ (traits et losanges noirs) et $K = 10^{13}$ (traits et étoiles magentas). (a) $N = 2$, corde raide ($B = 1.78 \times 10^{-5}$) non amortie (trait plein) et amortie (trait pointillé) (b) $N = 1002$, obstacle ponctuel centré, corde raide amortie.

où s_{courant} est le signal courant avec $F_e < 4$ MHz et $s_{\text{réf}}$ est le signal servant de référence, avec $F_e \approx 4$ MHz. Ils correspondent au déplacement de la corde à 10 mm de l'extrémité $x = L$ calculé sur 3 s. Les sommes sont calculées sur l'ensemble τ des temps discrets auxquels le signal de plus faible fréquence d'échantillonnage (environ 2 kHz) est évalué. Deux conclusions attendues se dessinent : l'ajout de pertes accélère la convergence, et plus le contact est doux (cela correspond à α plus grand et/ou K plus petit), plus la convergence est rapide, puisque moins de hautes fréquences sont engendrées lors des contacts.

Sur la figure 3.4, la pente 2 correspondant à l'ordre du schéma est visible après une fréquence d'échantillonnage seuil. Pour les premières fréquences d'échantillonnage et dans la plupart des cas présentés ici, on observe un plateau. Cela peut être dû au fait que pour des fréquences d'échantillonnage plus petites, l'ensemble du contenu spectral du signal n'est pas correctement représenté, de sorte que la convergence attendue ne peut pas s'exprimer. Cela pourrait expliquer le fait que plus le contact est raide, plus ce seuil est élevé, puisque davantage de hautes fréquences sont engendrées. Dans le cas $N - 1 = 1$, les premiers signaux diffèrent du signal à 4 MHz principalement

à cause d'une différence de phase qui augmente à chaque contact, comme illustré sur la figure 3.5. Le tableau 3.1 détaille la pénétration maximale de la corde dans l'obstacle pour $F_e = 2$ MHz. Plus le contact est doux, plus la pénétration est grande. Une corrélation peut être observée entre le comportement de convergence et la pénétration maximale, puisque la pénétration est directement liée à la raideur du contact et donc à la quantité de hautes fréquences engendrées. On observe que lorsque la pénétration est plus grande que le diamètre de la corde, l'erreur relative pour $F_e = 2$ MHz est plus petite que 10^{-2} . Par contre, pour de plus faibles pénétrations, la convergence est significativement plus lente.

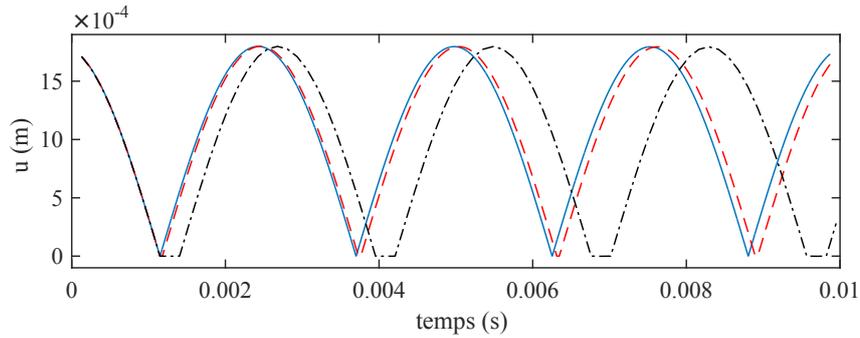


FIGURE 3.5 – Déplacement sans amortissement ni dispersion pour $N - 1 = 1$, $K = 10^{13}$, $\alpha = 1.5$. $F_e \approx 8$ kHz (trait noir pointillé-point), 64 kHz (trait pointillé rouge) et 4 MHz (trait bleu).

$N = 2$				
α / K	10^7	10^9	10^{11}	10^{13}
1	2.4×10^{-5}	2.4×10^{-6}	3.0×10^{-7}	3.4×10^{-8}
1.5	2.2×10^{-4}	3.5×10^{-5}	5.5×10^{-6}	9.2×10^{-7}
2	8.7×10^{-4}	2.0×10^{-4}	4.4×10^{-5}	9.5×10^{-6}
$N = 1002$, obstacle ponctuel centré				
α / K	10^7	10^9	10^{11}	10^{13}
1	2.1×10^{-4}	2.3×10^{-6}	1.9×10^{-7}	1.8×10^{-8}
1.5	1.4×10^{-3}	1.5×10^{-4}	7.6×10^{-6}	6.7×10^{-7}
2	1.8×10^{-3}	1.1×10^{-3}	1.3×10^{-4}	1.4×10^{-5}

TABLE 3.1 – Pénétration maximale (m) pour la méthode mixte, $F_e = 2$ MHz, $B = 1.78 \times 10^{-5}$.

Les valeurs $\alpha = 1.5$ et $K = 10^{13}$ sont sélectionnées suite à une comparaison empirique à une expérience (voir le chapitre 4). Dans le cas d'un obstacle ponctuel, il s'avère qu'adoucir le contact éloigne les signaux numériques des données expérimentales, tandis que le raidir n'améliore par significativement les résultats. Dans la suite, la fréquence d'échantillonnage choisie pour les simulations correspond à une erreur L^2 relative inférieure à 10^{-1} , ce qui constitue le critère de convergence. Ainsi, une fréquence d'échantillonnage F_e supérieure à 1 MHz est nécessaire dans le cas de l'obstacle ponctuel observé ici. Les paramètres numériques utilisés par la suite sont précisés dans le tableau 3.2, la fréquence d'échantillonnage sera quant à elle reprécisée, elle peut varier en fonction de l'obstacle considéré. En particulier, dans le cas d'un obstacle ponctuel affleurant la corde au repos, nous choisirons $F_e = 2$ MHz. Notons que les valeurs choisies sont très élevées pour permettre le respect du critère de convergence que nous nous sommes imposé; ce critère est très strict car il s'applique sur des signaux couvrant l'intégralité des instants de contact (3 s dans le cas étudié ici), si bien qu'un simple déphasage peut engendrer de fortes erreurs, sans pour autant que les résultats ne diffèrent significativement. On pourrait imaginer un critère qui

prennent davantage en compte la similarité des formes d'onde et qui donne moins de poids aux éventuels déphasages, sans toutefois les ignorer.

N	α	K	β
1002	1.5	10^{13}	0

TABLE 3.2 – Paramètres numériques pour la méthode mixte.

3.2.1.6 Temps de calcul

Les temps de calculs du schéma mixte sont ici présentés à titre indicatif et discutés. Les calculs ont été réalisés avec Matlab R2015a, avec un unique CPU de cadence 2.4 GHz. Les temps de calcul sont donnés dans le tableau 3.3 pour la simulation d'une seconde de signal et pour diverses étapes de l'algorithme : la boucle de Newton-Raphson, le calcul de \mathbf{b} , \mathbf{a} , \mathbf{r} dans (3.20) et le temps total. L'évaluation de l'énergie donnée par (3.27) étant optionnelle, le temps de calcul correspondant est présenté à part.

$N - 1 = 500$				
F_e	44.1 kHz	88.2 kHz	176 kHz	1 MHz
Newton-Raphson	19.5	38.2	61.0	242
\mathbf{b} , \mathbf{a} , \mathbf{r} dans (3.20)	45.8	93.5	168	959
Autres opérations	3.21	6.65	9.63	53.3
Temps total	68.5	138	239	1255
Énergie	17.7	37.6	58.1	323
$N - 1 = 1001$				
F_e	44.1 kHz	88.2 kHz	176 kHz	1 MHz
Newton-Raphson	29.8	54.7	105	362
\mathbf{b} , \mathbf{a} , \mathbf{r} dans (3.20)	171	345	695	3881
Autres opérations	4.2	7.3	15	83
Temps total	205	407	815	4326
Énergie	75	150	301	1691

TABLE 3.3 – Temps de calcul pour la méthode mixte, en secondes, pour $N - 1 = 500$ et $N - 1 = 1001$, pour la simulation d'une seconde de signal.

Il apparaît clairement que les étapes les plus coûteuses concernent le calcul de \mathbf{b} , \mathbf{a} , \mathbf{r} et de l'énergie, *i.e.* les produits impliquant vecteurs et matrices, ces dernières étant pleines. Ainsi, le coût de calcul est principalement lié à N , si bien que l'on pourrait envisager d'adapter le pas spatial à l'obstacle autour duquel il serait plus fin, pour avoir un pas plus grossier sur le reste de la corde et ainsi réduire le temps de calcul. On pourrait également envisager d'employer un pas de temps variable (FLORES et al., 2010), concentré lors des contacts. Cependant, de tels managements devraient être effectués avec précaution, car un pas spatial variable modifierait la structure des matrices impliquées, et un pas de temps variable devrait être accompagné d'une conversion de fréquence d'échantillonnage n'altérant pas le son produit.

3.2.1.7 Comparaison à la solution analytique

Les signaux issus du schéma numérique (3.18) sont ici comparés à la solution analytique présentée dans la section 2.4, dans le cas d'une corde idéale en présence d'un obstacle ponctuel centré affleurant la corde au repos. La solution analytique n'inclut pas de pénétration et correspond à un obstacle parfaitement rigide. Pour faciliter les comparaisons à la solution analytique, les

résultats sont sans dimension dans cette section. Des valeurs adimensionnées sont ainsi utilisées dans les simulations. Les paramètres de la force de contact du schéma mixte sont $\alpha = 1.5$, $K_d = 10^{10}$ et $\beta = 0$. Un nombre de points spatiaux intérieurs $N - 1 = 1001$ et une fréquence d'échantillonnage adimensionnée $F_{e,d} = 5000$ (correspondant à une fréquence d'échantillonnage d'environ 2 MHz, en se référant au cas dimensionné de la corde considérée dans la section 3.2.1.5) sont sélectionnés. Les indices d indiquent que les variables sont sans dimension.

Pour une comparaison qualitative, la figure 3.6 montre des instantanés successifs du profil de la corde pendant sa vibration. Comme précisé dans (CABANNES, 1984a), pour cette configuration précise le contact est persistant et se maintient tant que la corde est sous sa position au repos. L'observation de ces instantanés présente une coïncidence quasiment parfaite entre les solutions numérique et analytique.

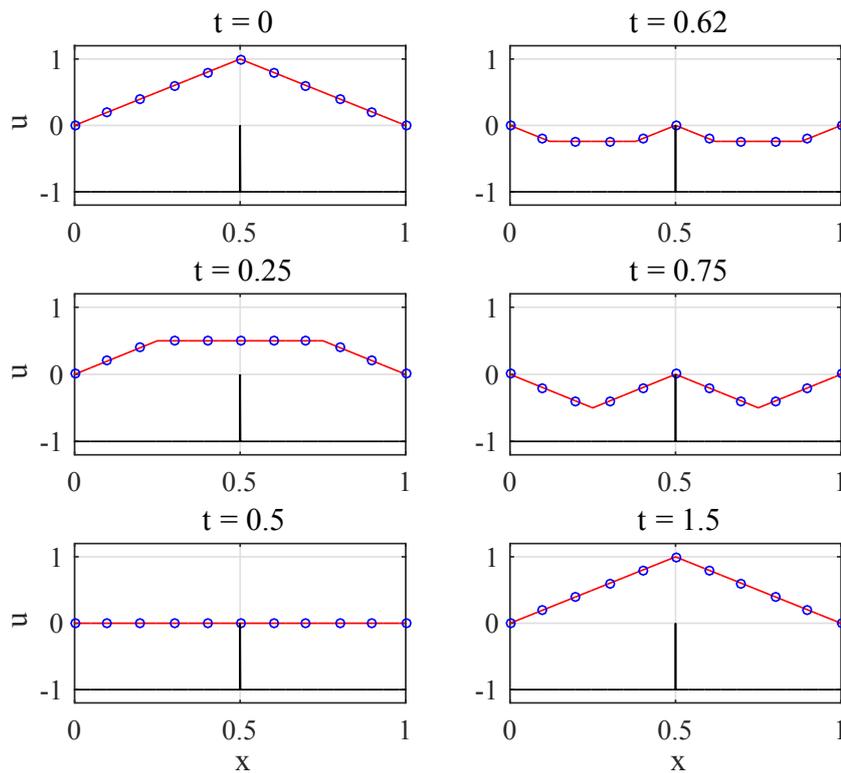


FIGURE 3.6 – Instantanés du mouvement d’une corde idéale entrant en contact avec un obstacle ponctuel centré (trait noir). Comparaison de la solution analytique (cercles bleus) et du résultat numérique (trait rouge) à six instants différents de la première période. Les simulations sont effectuées avec le schéma mixte, pour $F_{e,d} = 5000$, $K_d = 10^{10}$, $\alpha = 1.5$ et $\beta = 0$. Les variables présentées sont sans dimension.

La comparaison présentée sur la figure 3.7 se concentre sur le mouvement en un point x_m situé à $9L/100$, pendant les premiers instants. De plus, afin d’avoir une meilleure compréhension des effets de l’amortissement et de la dispersion dans le modèle, ceux-ci sont incorporés séparément afin d’examiner le comportement de la solution par rapport au cas de la corde idéale. Les figures 3.7(a) et 3.7(b), pour une corde idéale, respectivement sans et avec obstacle, montrent une forte correspondance entre le signal numérique et la solution analytique. En particulier, on peut observer que la fréquence fondamentale dans le cas avec obstacle est égale à celle dans le cas sans obstacle multipliée par $4/3$, ainsi que le prédit la théorie (CABANNES, 1981). La figure 3.7(c) montre l’effet de l’amortissement sur le résultat numérique. De petits creux apparaissent, pointés par des flèches. Ils sont très probablement dus à l’arrondissement des coins se propageant le long de la corde. Enfin, l’ajout de dispersion engendre un précurseur puisque les hautes fréquences arrivent plus rapidement au point de mesure que les plus basses. Les creux mentionnés précédemment apparaissent également dans ce cas car la dispersion induit un arrondissement des coins.

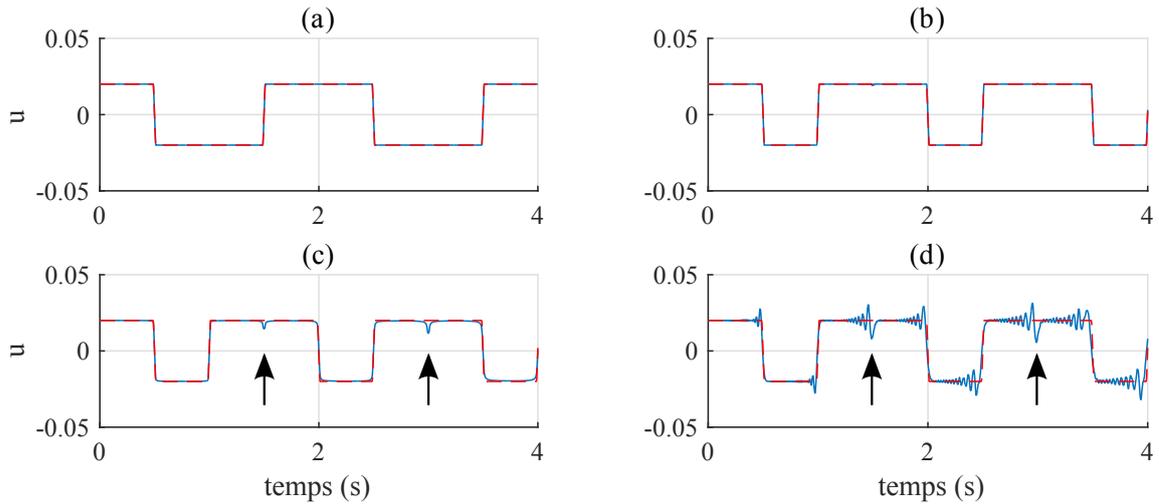


FIGURE 3.7 – Signal temporel pour la corde sans dimension à $x_m = 9L/100$, comparaison des résultats numériques (trait bleu) avec la solution analytique pour une corde idéale (trait rouge pointillé). $N = 1002$, $F_{e,d} = 5000$. Les variables sont sans dimension. (a) Corde idéale (sans pertes ni dispersion), et sans obstacle (b) corde idéale avec obstacle (c) pertes ajoutées dans la simulation numérique, $\sigma_{d,j} = j \times 5 \times 10^{-3}$, $\forall j \in \{1, \dots, N - 1\}$, avec obstacle (d) corde numérique dispersive non amortie, $B_d = 2 \times 10^{-5}$, avec obstacle.

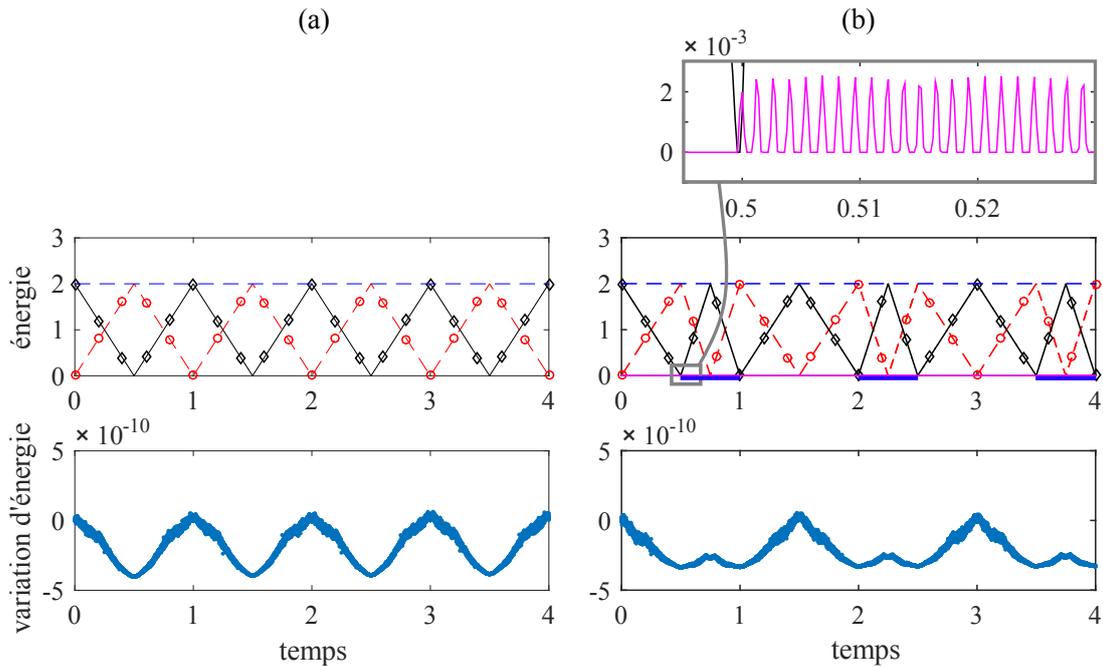


FIGURE 3.8 – Comportement énergétique de la corde numérique idéale obtenue avec la méthode mixte, $F_{e,d} = 5000$. Les variables sont sans dimension. En haut : énergie cinétique (trait pointillé et cercles rouges); énergie potentielle (trait et losanges noirs); énergie totale (trait pointillé bleu). En bas : variation relative de l'énergie $\frac{H^{n+1/2} - H^{1/2}}{H^{1/2}}$. (a) Sans obstacle. (b) Obstacle ponctuel centré. L'énergie de contact (trait magenta) est également présentée. Les traits bleus gras indiquent les intervalles de temps pendant lesquels le contact est persistant, cela résulte en un comportement oscillant pour l'énergie de contact, montré dans l'encart supérieur.

Enfin, les variations de l'énergie de la corde numérique raide sont présentées sur la figure 3.8, avec et sans obstacle. L'amortissement n'étant pas inclus, l'énergie est conservée : les variations normalisées d'énergie sont petites, de l'ordre de 10^{-10} . On peut également observer que pendant l'intervalle de temps où le contact a lieu (indiqué par un trait bleu gras sur la figure 3.8(b)), des

oscillations de l'ordre de 10^{-3} de l'énergie de contact apparaissent. Elles sont dues à de petites oscillations de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-3} du point de la corde en contact avec l'obstacle. Le comportement de la corde en ce point est étudié plus en détail dans la section 4.3.2.2 du chapitre suivant.

La cohérence des résultats numériques issus du schéma mixte par rapport à la solution analytique a été mise en évidence dans cette section. De plus, un premier aperçu de l'influence des amortissements et de la dispersion a été donné ; leur rôle dans le réalisme des simulations est étudié dans le chapitre 4 lors d'une comparaison de simulations à l'expérience. Des considérations d'énergie ont également été présentées. Nous proposons à présent un autre schéma numérique, d'une grande généralité, qui s'attache à résoudre le problème de la corde vibrante en présence d'un contact unilatéral dans l'espace modal. Il s'agit donc de discrétiser l'équation (3.15) (rappelée dans la prochaine section) directement, celle-ci portant sur les coefficients modaux. La difficulté tient alors au couplage des équations par le second membre.

3.2.2 Schéma modal

Dans cette section, on présente un deuxième schéma conservatif pour la résolution de l'équation (3.15), que l'on rappelle :

$$\frac{\mu}{\Delta t^2}(\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{C}\mathbf{q}^n + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{q}^{n-1}) = \mathbf{F}^n.$$

Le schéma développé ici, contrairement au schéma mixte décrit dans la section 3.2.1, opère intégralement dans l'espace modal. Le déroulement de la thèse n'a pas permis une exploitation poussée de ce schéma, il ne sera de ce fait pas utilisé dans la suite de ce manuscrit. Nous en présentons les équations générales pour une force \mathbf{F} quelconque dérivant d'un potentiel \mathbf{G} , et l'illustrons dans le cas d'une corde représentée par ses quatre premiers modes, sans toutefois entrer dans le détail de l'implémentation.

Nous nous intéressons à la discrétisation du terme non linéaire, qui couple l'ensemble des modes et dérive d'un potentiel \mathbf{G} (cf (2.31), page 20). Nous souhaitons déterminer un schéma conservatif à trois pas de temps pour cette équation. Nous allons ainsi mettre en évidence une famille de schémas conservatifs qui contient notamment les formes de schémas mis en exergue dans (CHABASSIER et al., 2010).

Dans cette section et cette section seulement, le nombre de modes est noté N (au lieu de $N_m = N - 1$) afin de ne pas alourdir les expressions.

3.2.2.1 Forme générale de schémas conservatifs

Nous cherchons une discrétisation du second membre qui permette, de même que pour le schéma mixte, d'obtenir un schéma conservatif, afin de garantir sa stabilité. Nous nous intéressons donc en premier lieu à l'énergie du système discret. Elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H_N^{n+1/2} = H_{N,l}^{n+1/2} + G_N^{n+\frac{1}{2}}, \quad (3.37)$$

où $H_{N,l}^{n+1/2}$ correspond à la somme des énergies cinétique et potentielle de la corde, l'indice l exprimant leur caractère linéaire, et $G_N^{n+\frac{1}{2}}$ est l'énergie liée au contact. Nous choisissons d'exprimer cette dernière en fonction de G^n et G^{n+1} afin de pouvoir obtenir un schéma sur trois pas de temps, ce qui permettra d'obtenir des résultats généraux tout en limitant le nombre de termes impliqués. Pour que le schéma soit conservatif, l'énergie discrète doit vérifier :

$$\delta_{t-} H_N^{n+1/2} = 0. \quad (3.38)$$

Le rôle du terme $H_{N,l}^{n+1/2}$ a été discuté dans la section 3.2.1.3, nous nous intéressons ici uniquement au terme lié au contact : il s'agit de déterminer $G_N^{n+1/2}$ tel que (3.38) soit satisfaite.

Pour calculer ce terme, on multiplie la ligne i de l'équation discrète (3.15), liée au $i^{\text{ème}}$ mode, par $\delta_{t,q_i} = \frac{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}}{2\Delta t}$. Au second membre, on obtient ainsi des termes du type $\delta_{t,q_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}$. L'énergie liée au second membre est alors obtenue à partir du calcul de $\sum_{i=1}^N \delta_{t,q_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}$. Nous considérons une discrétisation centrée sur deux pas de temps pour la dérivée partielle du potentiel dont dérive la force de contact, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \delta_{t,q_i} \frac{G(q_1^n, \dots, q_i^{n+1}, \dots, q_N^n) - G(q_1^n, \dots, q_i^{n-1}, \dots, q_N^n)}{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{G(q_1^n, \dots, q_i^{n+1}, \dots, q_N^n) - G(q_1^n, \dots, q_i^{n-1}, \dots, q_N^n)}{2\Delta t} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{(e_{i+} - e_{i-})G(q_1^n, \dots, q_N^n)}{2\Delta t}, \end{aligned}$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{cases} e_{i-}G(q_1^n, \dots, q_i^n, \dots, q_N^n) = G(q_1^n, \dots, q_i^{n-1}, \dots, q_N^n) & (3.39a) \\ e_{i+}G(q_1^n, \dots, q_i^n, \dots, q_N^n) = G(q_1^n, \dots, q_i^{n+1}, \dots, q_N^n). & (3.39b) \end{cases}$$

Il reste à déterminer l'approximation à retenir pour $G(q_1^n, \dots, q_N^n)$ que l'on peut *a priori* estimer à l'aide d'une moyenne quelconque ; nous choisissons de la limiter à trois pas de temps afin de limiter le nombre de termes en jeu. Nous la noterons $M_N^i G(q_1^n, \dots, q_N^n)$, avec M_N^i un opérateur de moyenne à déterminer pour $i \in \{1, \dots, N\}$. Nous n'explicitons pas le terme G lui-même, afin de garder un cadre général. Dans le cas de la corde, il est donné par l'expression (2.32), page 20.

Une forme générale de schémas conservatifs s'écrit donc, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$:

$$\frac{\mu}{\Delta t^2} (q_i^{n+1} - C_{ii}q_i^n + \tilde{C}_{ii}q_i^{n-1}) = - \frac{(e_{i+} - e_{i-})M_N^i G(q_1^n, \dots, q_N^n)}{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}}. \quad (3.40)$$

La partie linéaire (membre de gauche) est traitée à l'aide du schéma présenté dans la section 3.1, les coefficients C_{ii} et \tilde{C}_{ii} sont donnés par (3.13) et (3.14).

Pour que la relation (3.38) soit satisfaite, il faut que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\delta_{t-} G_N^{n+1/2} = \sum_{i=1}^N \frac{(e_{i+} - e_{i-})M_N^i G(q_1^n, \dots, q_N^n)}{2\Delta t}. \quad (3.41)$$

Nous cherchons donc à déterminer des expressions de $G_N^{n+1/2}$ et des opérateurs M_N^i qui satisfassent cette relation. Nous donnons directement un schéma pour $N = 1$, puis nous détaillons la procédure pour $N = 2$ avant d'exprimer le cas N quelconque. Les cas $N = 3$ et $N = 4$ sont explicités dans l'annexe (D).

3.2.2.2 Cas $N = 1$

Dans le cas $N = 1$, un schéma conservatif est obtenu en choisissant pour second membre le terme $-\frac{G(q_1^{n+1}) - G(q_1^{n-1})}{q_1^{n+1} - q_1^{n-1}}$, soit :

$$M_1^1 = 1 \quad \text{et} \quad G_1^{n+1/2} = \frac{G(q_1^{n+1}) + G(q_1^n)}{2}. \quad (3.42)$$

3.2.2.3 Cas $N = 2$

Nous traitons intégralement le cas $N = 2$, car il est suffisamment complexe pour exprimer le raisonnement en détail et suffisamment simple pour que la lecture n'en soit pas trop fastidieuse. La démarche appliquée est systématique et valable pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Elle est ici mise en œuvre pour $N = 2$, en trois étapes.

Étape 1 : Exprimer $G_N^{n+\frac{1}{2}}$ de la manière la plus générale possible en fonction des temps n (temps courant) et $n + 1$.

$$G_2^{n+\frac{1}{2}} = \left(a_0 G(q_1^n, q_2^n) + a_1 G(q_1^n, q_2^{n+1}) + a_2 G(q_1^{n+1}, q_2^n) + a_3 G(q_1^{n+1}, q_2^{n+1}) \right), \quad (3.43)$$

avec $a_i \in \mathbb{R} \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

Étape 2 : Exprimer $\delta_{t-} G_N^{n+\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} \delta_{t-} G_2^{n+\frac{1}{2}} = & \frac{1}{\Delta t} \left(a_0 \left(G(q_1^n, q_2^n) - G(q_1^{n-1}, q_2^{n-1}) \right) + a_1 \left(G(q_1^n, q_2^{n+1}) - G(q_1^{n-1}, q_2^n) \right) \right. \\ & \left. + a_2 \left(G(q_1^{n+1}, q_2^n) - G(q_1^n, q_2^{n-1}) \right) + a_3 \left(G(q_1^{n+1}, q_2^{n+1}) - G(q_1^n, q_2^n) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Étape 3 : Réécrire $\delta_{t-} G_N^{n+\frac{1}{2}}$ sous la forme d'une somme de termes du type $(e_{i+} - e_{i-})G$. De cette écriture, déduire l'opérateur $M_N^i, \forall i \in \{1, \dots, N\}$.

Tout d'abord, remarquons que les termes ne dépendant que du temps n ne nous permettront pas d'obtenir des termes du type $(e_{i+} - e_{i-})G$. Ils doivent donc s'annuler, ce qui nous donne une première condition sur les coefficients : $a_0 = a_3$.

Commençons par le terme $a_3 G(q_1^{n+1}, q_2^{n+1})$ de l'équation (3.44), avec $a_3 = a_0$. Pour former une dérivée partielle centrée, ce terme peut se marier avec $G(q_1^{n-1}, q_2^{n+1})$ ou $G(q_1^{n+1}, q_2^{n-1})$, que l'on a besoin pour cela de soustraire dans (3.44). Dans ce cas, il faut les ajouter ensuite pour maintenir l'égalité. Pour former à nouveau des dérivées partielles, on peut soustraire $G(q_1^{n-1}, q_2^{n-1})$ à $G(q_1^{n-1}, q_2^{n+1})$ et à $G(q_1^{n+1}, q_2^{n-1})$. À nouveau, il faudrait ajouter ces quantités que l'on viendrait de retrancher. Mais nous ne pourrions plus les exploiter, et nous nous retrouverions avec des termes rendant notre objectif (satisfaire (3.41)) inatteignable. Au lieu de les ajouter, on observe que ce type de terme est déjà présent dans $\delta_{t-} G_2^{n+\frac{1}{2}}$ (équation (3.44)). Il reste donc simplement à s'assurer que les quantités correspondent, et à ajuster les coefficients si besoin.

Nous nous intéressons maintenant au terme $a_1 G(q_1^n, q_2^{n+1})$. Nous retranchons $a_1 G(q_1^n, q_2^{n-1})$ dans l'équation (3.44), seule possibilité pour former une dérivée partielle centrée. Si l'on rajoute cette quantité pour équilibrer l'équation, on ne peut rien en faire et l'on n'aboutit pas. On observe plutôt que $G(q_1^n, q_2^{n-1})$ est déjà présent, mais avec le coefficient a_2 en facteur. Sous la condition $a_1 = a_2$, on peut apparier ces termes, et l'on arrive au bout des possibilités pour exploiter $a_1 G(q_1^n, q_2^{n+1})$. De même, si $a_1 = a_2$, on peut regrouper les termes $G(q_1^{n+1}, q_2^n)$ et $G(q_1^{n-1}, q_2^n)$, et ainsi tous les termes sont traités. Cela nous donne finalement, à partir de (3.44) :

$$\begin{aligned} 2\Delta t \delta_{t-} G_2^{n+\frac{1}{2}} = & a_0 \left[\alpha_0 G(q_1^{n+1}, q_2^{n+1}) - \alpha_0 G(q_1^{n-1}, q_2^{n+1}) + \alpha_0 G(q_1^{n-1}, q_2^{n+1}) - \alpha_0 G(q_1^{n-1}, q_2^{n-1}) \right. \\ & \left. + \beta_0 G(q_1^{n+1}, q_2^{n+1}) - \beta_0 G(q_1^{n+1}, q_2^{n-1}) + \beta_0 G(q_1^{n+1}, q_2^{n-1}) - \beta_0 G(q_1^{n-1}, q_2^{n-1}) \right] \\ & + a_1 \left[G(q_1^n, q_2^{n+1}) - G(q_1^n, q_2^{n-1}) \right. \\ & \left. + G(q_1^{n+1}, q_2^n) - G(q_1^{n-1}, q_2^n) \right], \end{aligned}$$

où de nouveaux coefficients α_0 et β_0 ont été introduits. Ils doivent vérifier : $\alpha_0 + \beta_0 = 1$ et $a_0 + a_1 = 1$.

Les termes retranchés artificiellement pour former des dérivées partielles sont en rouge, les termes ajoutés pour maintenir l'égalité vraie sont en bleu. On remarque qu'en « bout de chaîne », les termes n'ont pas besoin d'être retranchés artificiellement car ils sont déjà présents (et donc en noir). Sans cela, on ne pourrait aboutir.

Nous réorganisons ensuite ces termes, en regroupant ceux correspondant à la dérivée partielle par rapport à q_1 ensemble, et ceux correspondant à la dérivée par rapport à q_2 ensemble. Cela nous donne :

$$\nabla G(\underline{q}^{n-1}, \underline{q}^n, \underline{q}^{n+1}) = \left(\frac{a_0 [\alpha_0 (G(q_1^{n+1}, q_2^{n+1}) - G(q_1^{n-1}, q_2^{n+1})) + \beta_0 (G(q_1^{n+1}, q_2^{n-1}) - G(q_1^{n-1}, q_2^{n-1}))] + a_1 (G(q_1^{n+1}, q_2^n) - G(q_1^{n-1}, q_2^n))}{q_1^{n+1} - q_1^{n-1}} \right. \\ \left. \frac{a_0 [\alpha_0 (G(q_1^{n-1}, q_2^{n+1}) - G(q_1^{n-1}, q_2^{n-1})) + \beta_0 (G(q_1^{n+1}, q_2^{n+1}) - G(q_1^{n+1}, q_2^{n-1}))] + a_1 (G(q_1^n, q_2^{n+1}) - G(q_1^n, q_2^{n-1}))}{q_2^{n+1} - q_2^{n-1}} \right).$$

On vérifie bien qu'en multipliant chacun des termes de ce second membre par $\frac{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}}{2\Delta t}$ et en sommant le tout, on obtient $\delta_{t-} G_2^{n+\frac{1}{2}}$, avec :

$$G_2^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\{ a_0 \left[G(q_1^n, q_2^n) + G(q_1^{n+1}, q_2^{n+1}) \right] + a_1 \left[G(q_1^n, q_2^{n+1}) + G(q_1^{n+1}, q_2^n) \right] \right\}. \quad (3.45)$$

Enfin, on peut noter $a_0 = a$ et remplacer a_1 par $1 - a$, et l'on peut obtenir une expression plus concise à l'aide des opérateurs définis par (3.39) :

$$G_2^{n+\frac{1}{2}} = \left[a(1 + e_{1+}e_{2+}) + \left(\frac{1}{2} - a \right) (e_{1+} + e_{2+}) \right] G(n, n), \quad (3.46)$$

ou encore :

$$G_2^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [a_0(1 + e_{1+}e_{2+}) + a_1(e_{1+} + e_{2+})] G(n, n), \quad (3.47)$$

et, pour les opérateurs de moyenne du second membre :

$$M_2^1 = a_0 [\alpha_0(e_{2+}) + \beta_0(e_{2-})] + a_1 \quad (3.48)$$

$$M_2^2 = a_0 [\beta_0(e_{1+}) + \alpha_0(e_{1-})] + a_1. \quad (3.49)$$

Les conditions sur les coefficients (positifs) sont données par :

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2}, a_0 + a_1 = 1, \alpha_0 + \beta_0 = 1. \quad (3.50)$$

Par construction, le schéma numérique proposé est conservatif. Si $G \geq 0$ alors on obtient la stabilité du schéma, puisque son énergie est conservée et positive. Celui-ci est donc conservatif et stable. Notons que pour $a_0 = 1, a_1 = 0$ et $\{\alpha_0, \beta_0\} \in \{\{0, 1\}, \{1, 0\}, \{1/2, 1/2\}\}$, on retrouve les formes de schémas présentés dans (CHABASSIER et al., 2010) pour $N = 2$.

La méthode présentée pour la construction du schéma est générale et peut s'appliquer systématiquement $\forall N \in \mathbb{N}^*$. Cependant, plus N augmente et plus elle devient fastidieuse. On propose à présent une formulation générale, permettant d'obtenir une famille de schémas conservatifs pour tout N .

3.2.2.4 Cas N quelconque

Expression de $G_N^{n+\frac{1}{2}}$

Nous notons \mathbf{B}^N l'ensemble des N -uples binaires. Par exemple, pour $N = 2$:

$$\mathbf{B}^N = \{\{0, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 0\}, \{1, 1\}\}.$$

L'ordre des N -uples dans l'espace \mathbf{B}^N est tel que $\mathbf{B}^N(1 : 2^{N-1}) = \overline{\mathbf{B}^N(2^{N-1} + 1 : 2^N)}$, où la notation $\overline{}$ indique que l'on prend le complément à un de chaque élément binaire (par exemple $\overline{\{1, 0\}} = \{0, 1\}$).

Alors on a :

$$G_N^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{b \in \mathbf{B}^N(1:2^{N-1})} a_b \prod_{i=1}^N (e_{i+}^b + e_{i+}^{\bar{b}}), \quad (3.51)$$

avec $\sum_b a_b = 1$.

Expression des seconds membres

Introduisons tout d'abord quelques notations. Soit $b \in \mathbf{B}^N$.

- $b(i)$: valeur du $i^{\text{ème}}$ élément de b .
- b_i : b dans lequel on met la $i^{\text{ème}}$ valeur à 0.
- I_b^0 : ensemble des indices de b où se trouve la valeur 0.
- \mathbf{B}_A^N : ensemble des N -uples binaires privé de ceux contenant un « 1 » à toutes les positions $i \in A$.

Par exemple, soit $b = \{0, 0, 1\}$. Alors les définitions précédentes nous donnent :

- $b(3) = 1$.
- $b_3 = \{0, 0, 0\}$.
- $I_b^0 = \{1, 2\}$.
- $\mathbf{B}_{\{1,3\}}^3 = \{\{0, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}\}$.

Les notations posées, nous présentons maintenant l'expression générale de M_N^i , c'est-à-dire des seconds membres du schéma numérique. On a, pour $N \geq 1$:

$$M_N^i = \sum_{\substack{b \in \mathbf{B}^N(1:2^{N-1}) \\ b(i)=0}} a_b \left(\sum_{c \in \mathbf{B}_{\{i\} \cup I_b^0}^N} \alpha_{b,c}^i \prod_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}} e_{j+}^{\bar{b}(j).c(j)} e_{j-}^{\bar{b}(j).\bar{c}(j)} \right) + \sum_{\substack{b \in \mathbf{B}^N(1:2^{N-1}) \\ b(i)=1}} a_b \left(\sum_{c \in \mathbf{B}_{\{i\} \cup I_b^0}^N} \alpha_{b,c}^i \prod_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}} e_{j+}^{b(j).c(j)} e_{j-}^{b(j).\bar{c}(j)} \right), \quad (3.52)$$

avec les relations suivantes entre les coefficients $\alpha_{b,c}^i$:

- $\forall (b, c), b \in \mathbf{B}^N(1 : 2^{N-1})$ et $\exists i \in \{1, \dots, N\}$ tel que :

$$\begin{cases} c \in \mathbf{B}_{\{i\} \cup I_b^0}^N \text{ et Card}(I_{b,c}^0) \geq 1 \text{ si } b(i) = 0 \\ c \in \mathbf{B}_{\{i\} \cup I_b^0}^N \text{ et Card}(I_{b,c}^0) \geq 1 \text{ si } b(i) = 1, \end{cases}$$

avec :

$$\sum_{j \text{ tel que } (*)_{b,c}^j} \alpha_{b,c}^j = \sum_{c(k)=1} \alpha_{b,c_k}^j,$$

où $(*)_{b,c}^j$ se réfère à la propriété suivante :

$$\begin{cases} c \in \mathbf{B}_{\{j\} \cup I_b^0}^N & \text{si } b(j) = 0 \\ c \in \mathbf{B}_{\{j\} \cup I_b^1}^N & \text{si } b(j) = 1, \end{cases}$$

$$\bullet \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall b \in \mathbf{B}^N(1 : 2^{N-1}), \sum_{c \text{ tel que } (*)_{b,c}^i} \alpha_{b,c}^i = 1.$$

Dans la première relation, la condition d'existence d'un indice i satisfaisant certaines conditions spécifiques permet de s'assurer que le coefficient $\alpha_{b,c}^i$ existe dans l'un des M_N^i au moins. « j tel que $(*)_{b,c}^j$ » signifie « j tel que $\alpha_{(b,c)}$ soit un coefficient présent dans l'expression de M_N^j ».

La seconde relation est simplement une propriété de pondération, et signifie que la somme des coefficients $\alpha_{b,c}^i$ sous le joug d'un même a_b au sein d'un M_i^N vaut 1.

3.2.2.5 Application : la corde avec contact, $N = 4$

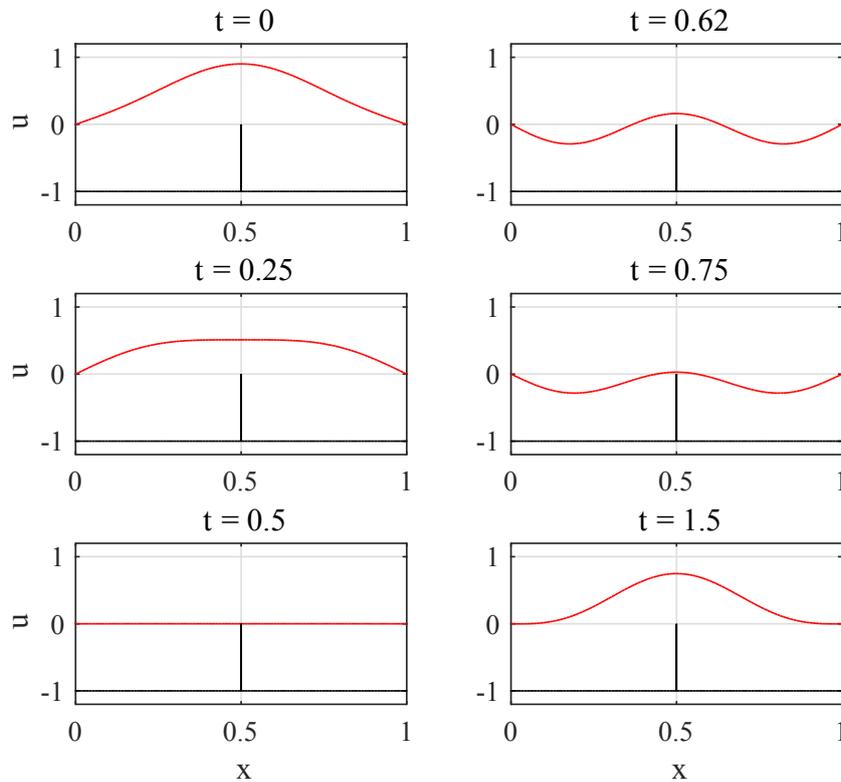


FIGURE 3.9 – Instantanés du mouvement d'une corde idéale entrant en contact avec un obstacle ponctuel centré (trait noir). Observation à six temps différents de la première période du résultat numérique (trait rouge). Les simulations sont effectuées avec le schéma modal, pour $N = 4$, $F_{e,d} = 5000$, $K_d = 10^{10}$ et $\alpha = 1.5$. Les variables présentées sont sans dimension.

On propose dans cette section un exemple d'application à la corde vibrante décrite par ses quatre premiers modes. Le potentiel G est donné par (2.32), page 20, les paramètres du modèle sont ceux de la section 3.2.1.7, et les coefficients du schéma modal sont tels que $a_1 = \alpha_1 = \alpha_{11} = 1$ (voir l'annexe D). Les coefficients restants sont caduques ou déterminés d'après les conditions que nous avons fixées sur eux. On obtient la figure 3.9 qui présente la forme de la corde à six instants successifs au cours de la première période. Elle peut être mise en regard de la figure 3.6 obtenue pour la méthode mixte. En particulier, on remarque que la corde ne retrouve pas au temps $t = 1.5$ sa forme initiale, probablement à cause du faible nombre de modes pris en compte.

La figure (3.10) présente l'évolution des différents termes d'énergie discrète ainsi que la variation relative de l'énergie totale. Celle-ci est du même ordre de grandeur que pour le schéma mixte (voir la figure 3.8(b)) et nous permet de vérifier que l'énergie est effectivement conservée.

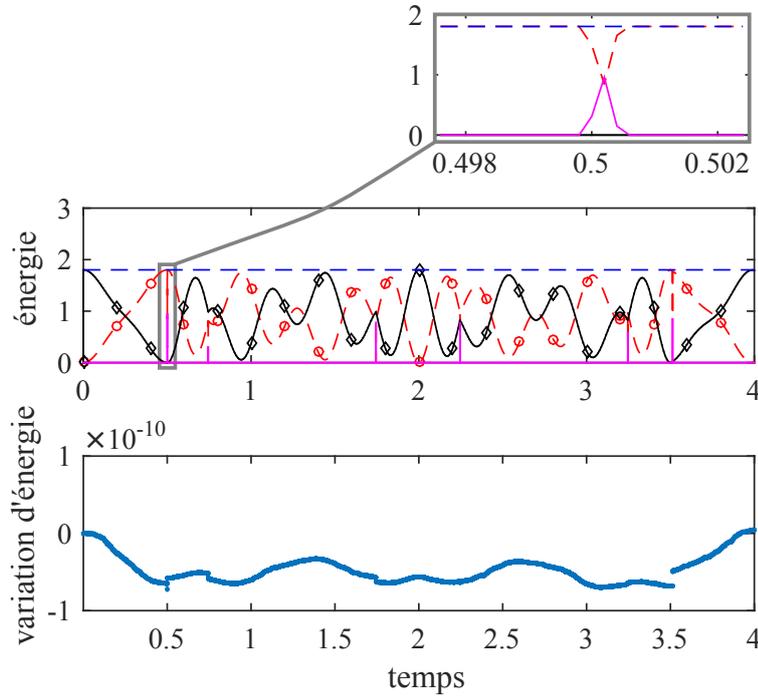


FIGURE 3.10 – Comportement énergétique de la corde numérique idéale obtenue avec la méthode modale, $F_{e,d} = 5000$. Les variables sont sans dimension. En haut : énergie cinétique (trait pointillé et cercles rouges); énergie potentielle (trait et losanges noirs); énergie totale (trait pointillé bleu). En bas : variation relative de l'énergie $\frac{H_4^{n+1/2} - H_4^{1/2}}{H_4^{1/2}}$.

3.2.2.6 Conclusion et intérêt

Une famille très générale de schémas conservatifs a été déterminée, pour un nombre N quelconque d'équations couplées à travers un second membre non linéaire dérivant d'un potentiel. La discrétisation de tout système d'équations présentant un tel second membre peut faire usage de ce schéma, le champ d'application possible est donc très large.

De plus, selon les coefficients choisis, on peut obtenir un schéma semi-implicite. Par exemple, pour $N = 3$, si l'on choisit $a_1 = \alpha_1 = 1$ et que l'on annule les autres termes, on obtient le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \delta_{tt}q_1^n + \omega_1^2(\alpha_i + (1 - \alpha_i)\mu_t.)q_1^n &= -\frac{G(q_1^{n+1}, q_2^n, q_3^n) - G(q_1^{n-1}, q_2^n, q_3^n)}{q_1^{n+1} - q_1^{n-1}} \\ \delta_{tt}q_2^n + \omega_2^2(\alpha_i + (1 - \alpha_i)\mu_t.)q_2^n &= -\frac{G(q_1^n, q_2^{n+1}, q_3^{n+1}) - G(q_1^n, q_2^{n-1}, q_3^{n+1})}{q_2^{n+1} - q_2^{n-1}} \\ \delta_{tt}q_3^n + \omega_3^2(\alpha_i + (1 - \alpha_i)\mu_t.)q_3^n &= -\frac{G(q_1^n, q_2^{n-1}, q_3^{n+1}) - G(q_1^n, q_2^{n-1}, q_3^{n-1})}{q_3^{n+1} - q_3^{n-1}}. \end{aligned}$$

On peut alors commencer par résoudre l'équation pour $i = 3$, qui n'est implicite qu'en q_3 . L'équation pour $i = 2$ peut alors être résolue et n'est plus implicite qu'en q_2 . L'équation pour $i = 1$ n'est implicite qu'en q_1 .

Ainsi, la généralité de la formule exposée confère au schéma une grande souplesse à travers le choix des coefficients. Une discussion sur l'ordre du schéma en fonction de ces derniers serait particulièrement intéressante, elle n'a pas été menée dans le cadre de cette étude faute de temps.

Pour une meilleure lisibilité du schéma dans les cas $N = 3$ et $N = 4$, on en trouvera dans l'annexe D une expression détaillée. On peut alors constater la complexification du second membre pour N croissant. Ainsi, pour une corde représentée par un grand nombre de modes N , le nombre de termes à évaluer deviendrait très conséquent. Le second membre peut s'exprimer très simplement pour certains choix de coefficients, cependant, afin de faire ce choix en connaissance de cause, il serait préférable d'étudier les propriétés des différents schémas obtenus avec les différents coefficients. Cette étude n'a pas été menée dans le cadre de cette thèse. Pour cette raison, ce schéma n'est pas utilisé dans la suite de ce document ; on retiendra toutefois ses qualités en termes de généralité et de conservation d'énergie.

Nous avons jusqu'ici développé deux types de schémas numériques pour simuler une corde vibrante en présence d'un obstacle unilatéral de forme quelconque. Ils sont conservatifs, ou dissipatifs en présence de pertes, et fondés sur une approche modale du problème. De plus, la force de contact est régularisée. Dans la section suivante, nous reprenons les modèles non réguliers pour le contact et le frottement corde/obstacle décrits dans le chapitre précédent et nous présentons une méthode de résolution numérique adaptée à ce type de modélisation.

3.3 Schéma numérique non régulier

Nous proposons dans cette section un schéma numérique pour la résolution des modèles non réguliers présentés dans les sections 2.2.2 et 2.3.2. De même que nous avons combiné différentes approches existantes de la littérature pour obtenir la méthode mixte (section 3.2.1), nous combinons à présent le schéma exact pour l'oscillateur libre et la prise en compte d'un contact unilatéral par une méthode non régulière, à l'aide du schéma dit de Moreau-Jean.

3.3.1 Discrétisation temporelle

Nous partons ici du système (2.46), page 23. En intégrant sur $]t^n, t^{n+1}]$, on obtient :

$$\mu(\mathbf{w}^+(t^{n+1}) - \mathbf{w}^+(t^n)) + \mu\Omega^2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{q} dt + 2\mu\Upsilon \int_{t^n}^{t^{n+1}} \dot{\mathbf{q}} dt = \int_{]t^n, t^{n+1}[} \mathbf{dI}. \quad (3.53)$$

Afin de donner une approximation discrète de cette égalité, nous traitons tout d'abord la partie linéaire avec le schéma (3.12), également utilisé pour le schéma mixte. Il présente l'avantage d'être exact en vol libre, et permet ainsi d'éviter la dispersion numérique, particulièrement préjudiciable dans les applications considérées ici. Nous traitons ensuite les impacts avec un schéma de type Moreau-Jean. Cela nous conduit aux expressions discrètes suivantes :

$$w_i^+(t^{n+1}) - w_i^+(t^n) \approx w_i^{n+1} - w_i^n \quad (3.54)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} q_i dt \approx \frac{\Delta t q_i^n}{1 + (1 - \gamma_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t}{2} + \sigma_i^* \Delta t} \quad (3.55)$$

$$\sigma_i \int_{t^n}^{t^{n+1}} \dot{q}_i dt \approx \frac{\sigma_i^* \Delta t v_i^n}{1 + (1 - \gamma_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t}{2} + \sigma_i^* \Delta t} \quad (3.56)$$

$$\int_{]t^n, t^{n+1}[} dI_i \approx P_i^{n+1}, \quad (3.57)$$

où γ_i et σ_i^* sont définis dans la section 3.2.1.3 (page 35) et $\mathbf{P}^{n+1} = [P_1^{n+1}, \dots, P_{N-1}^{n+1}]^T$ est une percussion.

On obtient le schéma suivant :

$$w_i^{n+1} - w_i^n + \frac{\Delta t \omega_i^2}{1 + (1 - \gamma_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2} + \sigma_i^* \Delta t} q_i^n + \frac{2 \Delta t \sigma_i^*}{1 + (1 - \gamma_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2} + \sigma_i^* \Delta t} w_i^n = \frac{1}{\mu} P_i^{n+1}, \quad (3.58)$$

avec $w_i^n = \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{\Delta t}$.

Le choix de la discrétisation de la partie linéaire correspond au schéma présenté dans la section 3.1.3, exact en l'absence de second membre.

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n + \Delta t \check{\mathbf{C}}_2 \mathbf{q}^n + \Delta t \check{\mathbf{C}}_3 \mathbf{w}^n = \frac{1}{\mu} \mathbf{P}^{n+1}, \quad (3.59)$$

où les matrices diagonales $\check{\mathbf{C}}_2$ et $\check{\mathbf{C}}_3$ sont celles présentées pour la méthode mixte (voir la section 3.2.1.3).

3.3.2 Écriture sous forme de LCP et résolution

L'équation (3.59) peut se réécrire :

$$\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}^n - \Delta t \check{\mathbf{C}}_2 \mathbf{q}^n - \Delta t \check{\mathbf{C}}_3 \mathbf{w}^n + \frac{1}{\mu} \mathbf{P}^{n+1}. \quad (3.60)$$

Notons $\mathbf{w}_{\text{libre}}^{n+1}$ la vitesse en l'absence de force contact, telle que :

$$\mathbf{w}_{\text{libre}}^{n+1} = \mathbf{w}^n - \Delta t \check{\mathbf{C}}_2 \mathbf{q}^n - \Delta t \check{\mathbf{C}}_3 \mathbf{w}^n. \quad (3.61)$$

De même que pour la méthode mixte, nous traitons le contact dans l'espace physique à l'aide de la matrice \mathbf{S} définie dans la section 3.2.1.1, dont nous désignons la ligne correspondant à la position de l'obstacle par \mathbf{S}_c . Le déplacement de la corde au point de contact est ainsi donné par $u_c = \mathbf{S}_c \mathbf{q}$ et sa vitesse par $\dot{u}_c = \mathbf{S}_c \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}_c \mathbf{w}$.

On obtient ainsi :

$$\dot{u}_c^{n+1} = \mathbf{S}_c \mathbf{w}_{\text{libre}}^{n+1} + \frac{1}{\mu} \mathbf{S}_c \mathbf{P}^{n+1}. \quad (3.62)$$

Puis, en utilisant la relation liant l'impulsion locale au contact à la percussion en coordonnées modales, $\mathbf{P} = \mathbf{S}_c^\top p_c$, on obtient une relation linéaire scalaire entre \dot{u}_c^{n+1} et p_c^{n+1} sous la forme :

$$\dot{u}_c^{n+1} = \mathbf{S}_c \mathbf{w}_{\text{libre}}^{n+1} + \frac{\Delta x}{\mu} \mathbf{S}_c \mathbf{S}_c^\top p_c^{n+1}. \quad (3.63)$$

La matrice $W = \frac{\Delta x}{\mu} \mathbf{S}_c \mathbf{S}_c^\top$ (un scalaire dans le cas d'un seul contact) est dite de Delassus (ACARY et al., 2008) et $\dot{u}_{c,\text{libre}}^{n+1} = \mathbf{S}_c \mathbf{w}_{\text{libre}}^{n+1}$ correspond à la vitesse libre au point de contact. On vérifie aisément que $W > 0$, ce qui permet d'obtenir l'unicité de la solution du LCP. Finalement on obtient :

$$\dot{u}_c^{n+1} = \dot{u}_{c,\text{libre}}^{n+1} + W p_c^{n+1}. \quad (3.64)$$

Par ailleurs, la condition de complémentarité décrite dans (2.44) peut être discrétisée à l'aide du schéma de Moreau-Jean de la manière suivante, pour un obstacle affleurant la corde au repos :

$$\begin{cases} p_c^{n+1} = 0 & \text{si } u_c^n > 0 \\ 0 \leq \dot{u}_c^{n+1} + \rho \dot{u}_c^n \perp p_c^{n+1} \geq 0 & \text{si } u_c^n \leq 0, \end{cases} \quad (3.65)$$

avec $p_c^n = \mathbf{S}_c \mathbf{P}^n$ ($\mathbf{p}^n = \mathbf{S} \mathbf{P}^n$, ou encore $\mathbf{P}^n = \Delta x \mathbf{S}^T \mathbf{p}^n$).

Notons l'importance d'employer un schéma implicite, un schéma explicite pouvant mener à des incohérences (ACARY et al., 2008).

Le calcul de la force de contact peut donc être établi comme suit :

- si $u_c^n > 0$, il n'y a pas de contact et $p_c^{n+1} = 0$.
- si $u_c^n \leq 0$, le contact est calculé au niveau de la vitesse par la résolution du LCP suivant :

$$\begin{cases} \dot{u}_c^{n+1} = \dot{u}_{c,\text{libre}}^{n+1} + W p_c^{n+1} \\ 0 \leq \dot{u}_c^{n+1} + \varrho \dot{u}_c^n \perp p_c^{n+1} \geq 0. \end{cases} \quad (3.66)$$

Il existe différents algorithmes dans la littérature qui permettent de résoudre des LCPs, plus ou moins adaptés selon les caractéristiques du problème (ACARY et al., 2008). Dans le cas d'un obstacle ponctuel toutefois, où W est un scalaire positif, le LCP peut se résoudre directement. En effet, le système (3.66), où $W > 0$, peut s'écrire :

$$p_c^{n+1} = \frac{1}{W} (\dot{u}_c^{n+1} - \dot{u}_{c,\text{libre}}^{n+1}) \in -\partial\psi_{T_{\mathbb{R}^+}(u_c^n)}(\dot{u}_c^{n+1} + \varrho \dot{u}_c^n) \quad (3.67)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{W} (\dot{u}_c^{n+1} + \varrho \dot{u}_c^n - (\varrho \dot{u}_c^n + \dot{u}_{c,\text{libre}}^{n+1})) \in -\partial\psi_{T_{\mathbb{R}^+}(u_c^n)}(\dot{u}_c^{n+1} + \varrho \dot{u}_c^n) \quad (3.68)$$

$$\Leftrightarrow \dot{u}_c^{n+1} = -\varrho \dot{u}_c^n + \text{proj}_{T_{\mathbb{R}^+}(u_c^n)}(\dot{u}_{c,\text{libre}}^{n+1} + \varrho \dot{u}_c^n). \quad (3.69)$$

On a donc :

$$p_c^{n+1} = \max\left(0, -\frac{1}{W}(\dot{u}_{c,\text{libre}}^{n+1} + \varrho \dot{u}_c^n)\right). \quad (3.70)$$

Une fois p_c calculé, on obtient \mathbf{P} , puis l'on peut calculer \mathbf{w} grâce à l'équation $\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}_{\text{libre}}^{n+1} + \frac{1}{\mu} \mathbf{P}^{n+1}$.

3.3.3 Énergie discrète

L'expression de l'énergie au temps t^n , pour une valeur donnée de ϱ , notée $H_\varrho^{n+\frac{1}{2}}$, regroupe l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Contrairement au cas d'une force régularisée, nous ne considérons pas ici de terme énergétique lié à la force de contact (ACARY, 2016). On a donc, en multipliant l'équation discrète dans le domaine physique par $\delta_t u^n$ (voir la section 3.2.1.3) :

$$H_\varrho^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{2} \langle \delta_t \mathbf{u}^n, \check{\mathbf{D}}_1 \delta_t \mathbf{u}^n \rangle + \frac{\mu}{2} \langle \mathbf{u}^{n+1}, \check{\mathbf{D}}_2 \mathbf{u}^n \rangle, \quad (3.71)$$

où $\check{\mathbf{D}}_1$ et $\check{\mathbf{D}}_2$ sont données dans la section 3.2.1.3.

Elle vérifie :

$$\delta_t H_\varrho^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \langle p_c^{n+1}, \delta_t u_c^n \rangle. \quad (3.72)$$

Pour que le schéma soit dissipatif, il faut donc avoir $\langle p_c^{n+1}, u_c^{n+1} - u_c^{n-1} \rangle \leq 0$. En l'absence de contact, le schéma est conservatif (dissipatif en présence de pertes propres à la corde). Étudions le comportement du système lorsque $p_c^{n+1} > 0$.

Si $\varrho = 1$, alors la condition $\dot{u}_c^{n+1} = -\varrho \dot{u}_c^n$ se traduit par $u_c^{n+1} = u_c^{n-1}$. On a dans ce cas $\langle p_c^{n+1}, u_c^{n+1} - u_c^{n-1} \rangle = 0$ et le schéma est conservatif, et donc inconditionnellement stable.

Soit à présent $0 \leq \varrho < 1$. Dans ce cas, la condition $\dot{u}_c^{n+1} = -\varrho \dot{u}_c^n$ peut également s'écrire $u_c^{n+1} - u_c^{n-1} = (1 - \varrho)(u_c^n - u_c^{n-1})$. Pour que le schéma soit dissipatif, il faut donc s'assurer que $\dot{u}_c^n \leq 0$ lorsque $p_c^{n+1} > 0$. On peut pour cela imposer la condition $\dot{u}_c^n \leq 0$ (en pratique $\dot{u}_c^n \leq \epsilon$, pour ϵ petit) pour appliquer la condition de complémentarité, comme fait dans (ACARY, 2016). Cela permet d'éviter de possibles injections d'énergie. Cependant, dans le cadre de notre étude, nous verrons dans la section 3.3.7 qu'imposer cette condition peut provoquer des comportements

indésirables. Ainsi, nous ne la prenons pas en compte dans la suite de ce manuscrit. Les cas $\varrho = 0$ et $\varrho = 1$ seront analysés ; nous verrons qu'en pratique, pour $\varrho = 0$ et les paramètres employés, l'énergie est seulement dissipée.

3.3.4 Prise en compte des deux polarisations transversales

Pour discrétiser l'équation (2.47) (page 24) avec la loi de frottement décrite dans la section 2.3.2, nous optons pour un schéma implicite (ACARY et al., 2008; THORIN, 2013). En suivant le déroulement adopté dans les sections 3.3.1 et 3.3.2 dans le cas d'une force de frottement au lieu d'une force de contact, on obtient :

$$\dot{v}_c^{n+1} - \dot{v}_{c,\text{libre}}^{n+1} = W_f f_{f,c}^{n+1}, \quad (3.73)$$

où $W_f = \frac{\Delta t}{\mu}$ est un scalaire et $f_{f,c}^{n+1} \in A_{\text{NS}} \text{sign}(-\dot{u}_c^{n+1})$ si $u_c^n < 0$, $f_{f,c}^{n+1} = 0$ sinon (voir la section 2.3.2).

Résoudre l'équation (3.73) revient à chercher l'intersection entre une fonction similaire à la fonction signe et une fonction affine, comme illustré sur la figure 3.11. L'unicité de la solution apparaît clairement pour une pente positive de la fonction affine, ce qui est vérifié dans le problème étudié ici.

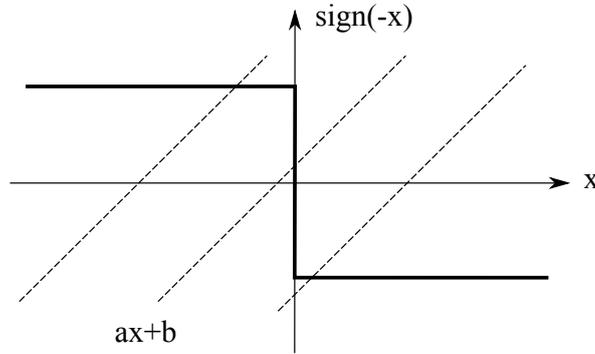


FIGURE 3.11 – Illustration de la recherche d'intersection entre une fonction affine ($a > 0$) et une fonction de signe.

L'énergie $\tilde{H}_\varrho^{n+\frac{1}{2}}$ pour v a une expression similaire à celle sur u (équation (3.71)) et vérifie :

$$\delta_t \tilde{H}_\varrho^{n+\frac{1}{2}} = \langle \delta_t \mathbf{v}^n, f_{f,c}^{n+1} \rangle. \quad (3.74)$$

L'énergie est donc dissipée si $\langle f_{f,c}^{n+1}, \delta_t u_c^n \rangle < 0$, *i.e.* si $\text{sign}(\dot{v}_c^{n+1}) = \text{sign}(\delta_t v_c^{n+1})$.

3.3.5 Étude de convergence

Des résultats de convergence impliquant le modèle de contact de Moreau sont exposés dans (MABROUK, 1998; BALLARD, 2000; DZONOU et al., 2007; DZONOU et al., 2009). Cependant une preuve de l'ordre de convergence globale du schéma ne semble pas avoir été menée dans la littérature (ACARY, 2012).

Une étude empirique de convergence exposée dans (ACARY, 2012) délivre des résultats dépendants de la norme choisie pour calculer l'erreur, celle-ci étant calculée sur l'état du système, *i.e.* sur les position et vitesse. Dans cette section, nous présentons des courbes de convergence pour le schéma décrit dans la section 3.3.2 en n'impliquant que la position dans le calcul de l'erreur, car c'est sur cette donnée que nous souhaitons ensuite travailler. La définition de l'erreur de convergence est donnée par l'équation (3.36), page 38.

La figure 3.12 présente les courbes de convergence pour $N - 1 = 1$, *i.e.* l'équivalent d'un seul oscillateur, et $N - 1 = 1001$. Ces courbes sont calculées pour $\rho \in \{0, 0.5, 1\}$ et sur 3 s de signal. On peut observer un comportement similaire à celui observé pour la méthode mixte (voir la section 3.2.1.5), à savoir la présence d'un plateau jusqu'à une valeur seuil de F_e , à partir de laquelle l'ordre de convergence du schéma s'exprime. De plus, on observe à nouveau l'amélioration de la convergence lorsque des pertes sont incluses dans le modèle de corde, bien que celles-ci soient faibles. On constate également que la convergence est nettement plus rapide lorsque $\rho = 0$ ou $\rho = 0.5$. Pour cause, ces valeurs du coefficient de restitution introduisent des pertes, dont l'effet est très important sur un tel système : pour $\rho = 0$ par exemple, le mouvement de l'oscillateur est annulé dès le premier contact (voir la figure 3.13). Pour $N - 1 = 1$, la convergence semble être à l'ordre 1 en position, tandis qu'elle apparaît d'ordre 2 pour $N - 1 = 1001$. D'après le critère de convergence choisi dans la section 3.2.1.5, nous prendrons par la suite $F_e = 4$ MHz. De même que pour le schéma mixte, on observe que des valeurs plus faibles de F_e peuvent permettre une représentation réaliste des signaux, ceux-ci ne souffrant principalement que d'un léger déphasage qui, sur les temps longs considérés, conduisent à une erreur ne permettant pas de satisfaire le critère de convergence imposé.

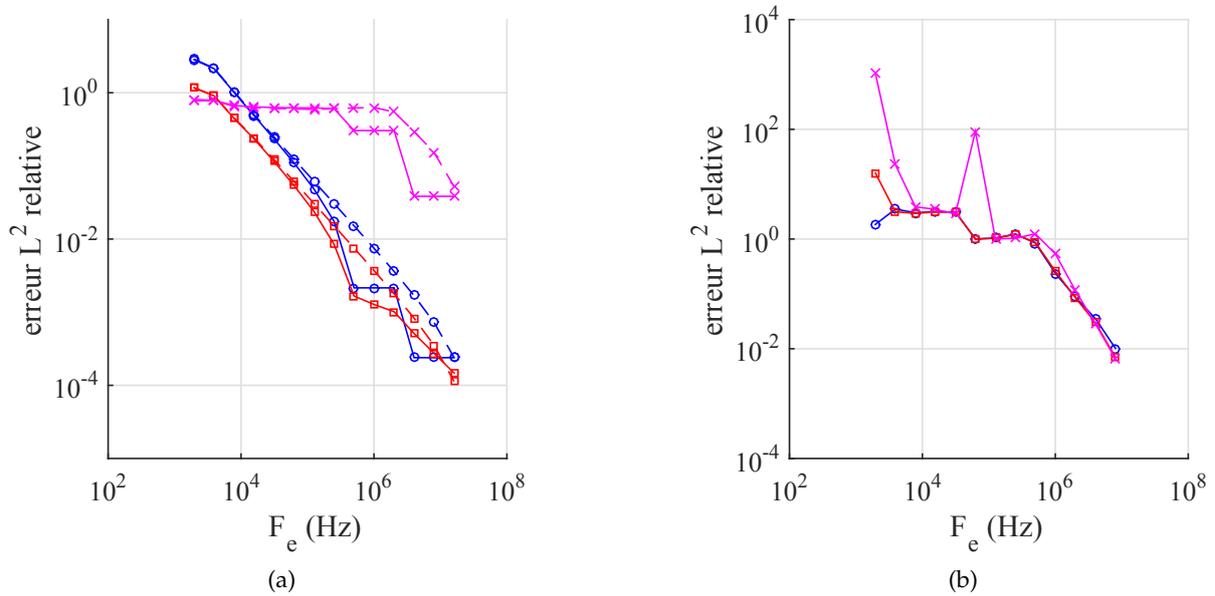


FIGURE 3.12 – Courbes de convergence L^2 sur des signaux de 3 s, pour $\rho = 0$ (bleu, cercles), $\rho = 0.5$ (noir, carrés) et $\rho = 1$ (magenta, croix). Sans (traits pointillés) et avec (traits pleins) amortissements propres à la corde dispersive. (a) $N - 1 = 1$ (b) $N - 1 = 1001$.

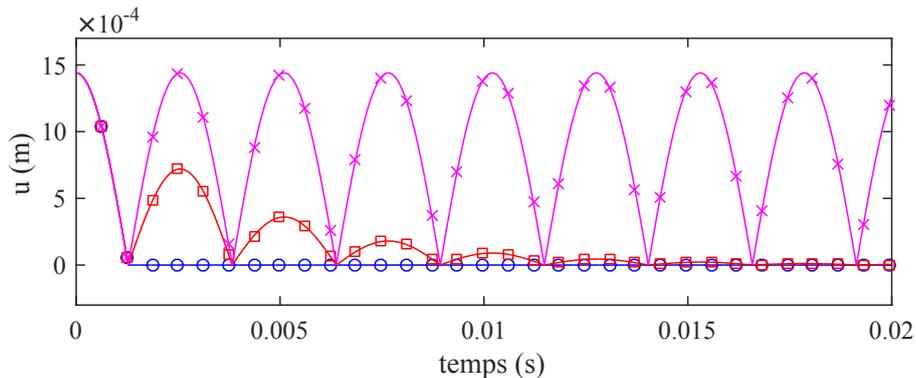


FIGURE 3.13 – Déplacement pour $N - 1 = 1$, $F_e = 4$ MHz, $\rho = 0$ (trait et cercles bleus), $\rho = 0.5$ (trait et carrés noirs) et $\rho = 1$ (trait et croix magentas).

Enfin, les pénétrations présentées dans tableau 3.4 se montrent peu sensibles aux paramètres du modèle et sont négligeables par rapport au diamètre de la corde.

$N = 2$			
ϱ	0	0.5	1
	5.5×10^{-8}	2.2×10^{-7}	5.5×10^{-8}
$N = 1002$, obstacle ponctuel centré			
ϱ	0	0.5	1
	1.3×10^{-7}	1.5×10^{-7}	1.4×10^{-7}

TABLE 3.4 – Pénétration maximale (m) pour la méthode non régulière, $F_e = 4$ MHz.

3.3.6 Temps de calcul

Le tableau 3.5 présente les coûts de calcul, pour une exécution sous Matlab 2015a, avec un CPU de cadence 2.4 GHz. Le calcul du LCP regroupe le calcul de (3.62), de la matrice de Delassus, de (3.70) puis la déduction de \mathbf{v}^{n+1} . Notons que le schéma est adapté au cas d'un obstacle ponctuel, ce qui simplifie les calculs par rapport au cas d'un obstacle distribué et diminue donc le coût des opérations en jeu. On observe ainsi des temps bien inférieurs à ceux impliqués dans la méthode mixte (voir le tableau 3.3, page 41), hormis pour le calcul de l'énergie, dont nous avons gardé une expression en déplacement. Celle-ci pourrait, pour la méthode non régulière, être calculée sur les coefficients modaux, impliquant alors des matrices diagonales et permettant un calcul optimisé. L'opération la plus coûteuse, en dehors de l'énergie, concerne finalement le calcul de $\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{q}$, qui n'est évalué que pour la détermination de l'énergie et la récupération du déplacement en sortie ; ce calcul pourrait donc être effectué *a posteriori*.

$N - 1 = 1001$				
F_e	44.1 kHz	88.2 kHz	176 kHz	1 MHz
LCP	1.38	5.44	3.93	18.51
Évaluation de (3.61)	0.832	1.56	3.01	17.6
Autres opérations	28.5	53.9	105	650
Temps total	30.7	60.9	112	686
Énergie	83.0	161	299	1665

TABLE 3.5 – Temps de calcul pour la méthode non régulière, en secondes, pour $N - 1 = 1001$, pour la simulation d'une seconde de signal.

Ainsi, avec les réserves énoncées quant à l'écriture des opérations pour l'une et l'autre méthode, et pour des valeurs de F_e équivalentes, ce qui doit être mis en regard de la convergence des schémas, on constate des temps de calcul bien inférieurs à ceux de la méthode mixte.

3.3.7 Comparaison à la solution analytique

La figure 3.14 montre les signaux sans dimension obtenus pour une corde idéale, pour $\varrho \in \{0, 1\}$, et les compare à la solution analytique. On constate ici une très bonne concordance entre cette solution et les simulations, avec de très faibles différences entre les cas $\varrho = 0$ et $\varrho = 1$ lorsqu'un obstacle est présent, la norme L^2 relative de la différence entre ces deux signaux étant inférieure à 1%.

La figure 3.15 présente le comportement énergétique des signaux numériques sans dimension pour $\varrho = 0$ et $\varrho = 1$. On peut observer la conservation de l'énergie discrète pour $\varrho = 1$, tandis

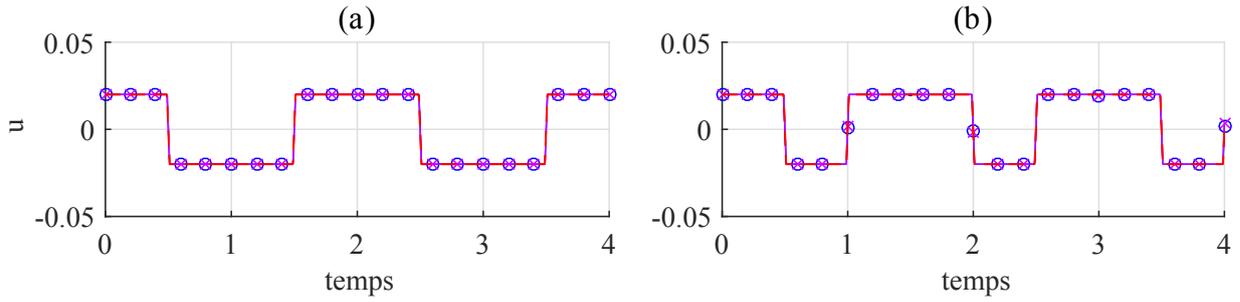


FIGURE 3.14 – Signal temporel pour la corde sans dimension à $x_m = 9L/100$, comparaison des résultats numériques sans pertes ni dispersion, pour $\varrho = 0$ (trait et cercles bleus) et $\varrho = 1$ (trait et croix violets), avec la solution analytique (trait rouge pointillé). $N = 1002$, $F_{e,d} = 5000$. Les variables sont sans dimension. (a) corde idéale sans obstacle (b) corde idéale avec obstacle.

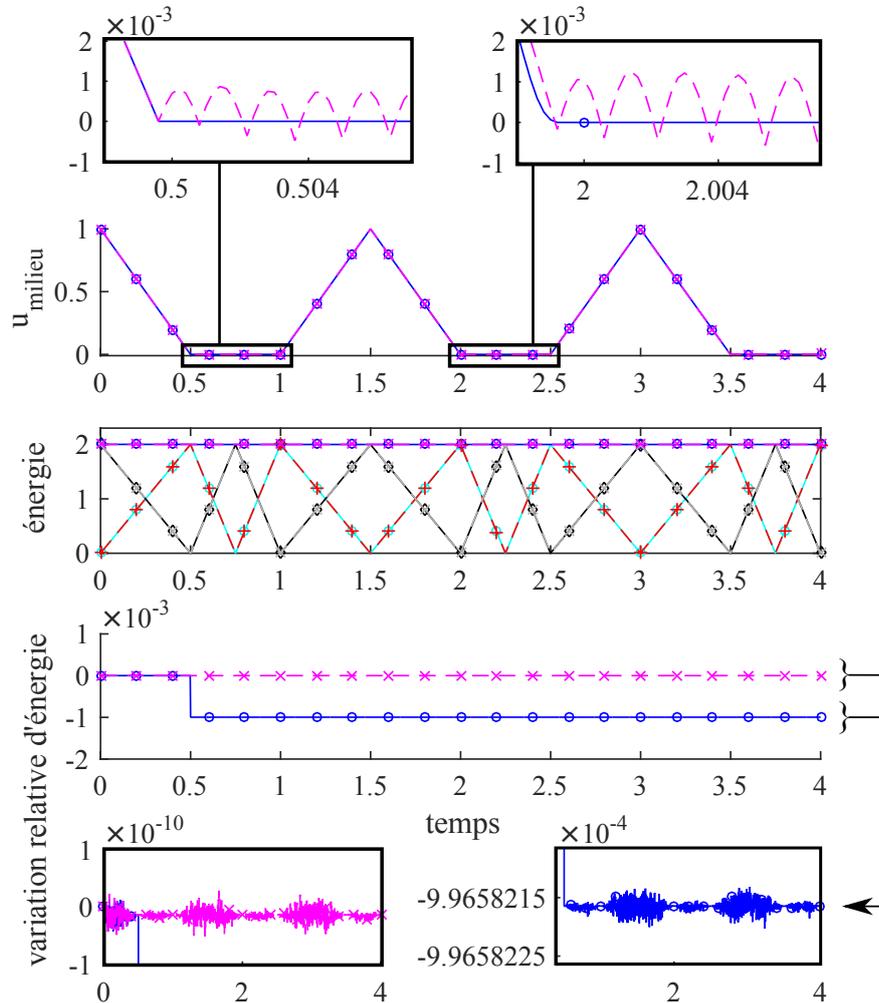


FIGURE 3.15 – Comparaison du comportement du point de la corde au contact entre les résultats numériques avec $\varrho = 0$ (trait et cercles bleus) et $\varrho = 1$ (trait pointillé et croix magentas), avec $N = 1002$, $F_{e,d} = 5000$, sans pertes ni dispersion. En haut : déplacement du point au milieu de la corde et zooms. Au milieu : énergie cinétique pour $\varrho = 0$ (trait et cercles cyans) et $\varrho = 1$ (trait pointillé et signes plus rouges), énergie potentielle pour $\varrho = 0$ (trait et losanges noirs) et $\varrho = 1$ (trait pointillé et croix gris) et énergie totale pour $\varrho = 0$ (trait et cercles bleus) et $\varrho = 1$ (trait pointillé et croix magentas). En bas : variation relative $\frac{H_e^{n+1/2} - H_e^{1/2}}{H_e^{1/2}}$ de l'énergie des signaux pour $\varrho = 0$ (trait et cercles bleus) et $\varrho = 1$ (trait pointillé et croix magentas).

qu'une chute d'énergie brutale mais faible intervient lors du premier contact pour $\rho = 0$. On constate enfin qu'au niveau de l'obstacle, le contact est parfaitement persistant pour $\rho = 0$ tandis que des oscillations de l'ordre de 10^{-3} interviennent pour $\rho = 1$. Cependant, cela n'affecte pas significativement le signal dans son ensemble.

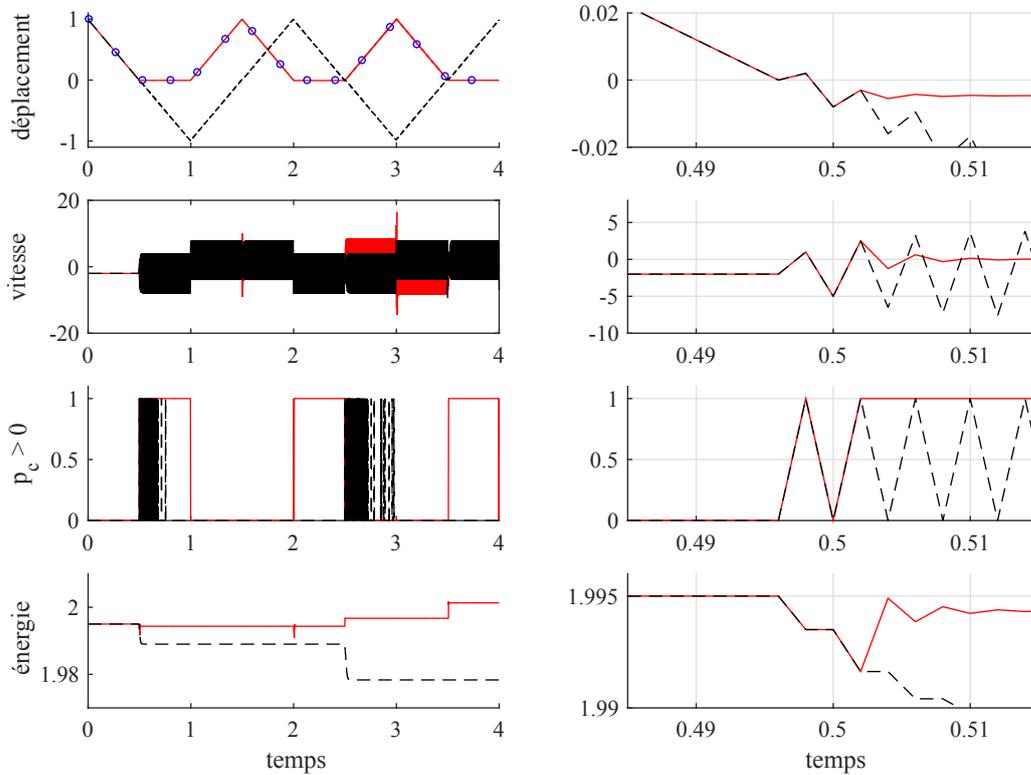


FIGURE 3.16 – Présentation d'un cas pathologique concernant l'éventuelle prise en compte de la condition $\dot{u}_c^n > 0$ lors de l'application de la condition de complémentarité. $N = 1002$, $\rho = 0.5$. À gauche : solution analytique (cercles bleus), signal avec (trait noir pointillé) et sans (trait rouge) l'application de cette condition, $F_{e,d} = 500$. De haut en bas : déplacement u_c^n , vitesse \dot{u}_c^n , indicateur valant 1 si $p_c^n > 0$ et 0 sinon, énergie $H_{0.5}^{n+\frac{1}{2}}$. À droite : zooms.

Nous présentons enfin un exemple pathologique où le système discret voit son énergie augmenter artificiellement si l'on n'impose pas $\dot{u}_c^n \leq 0$ pour appliquer la condition de complémentarité (voir la section 3.3.3). Le cas présenté concerne la valeur $\rho = 0.5$ (figure 3.16). Soit t^{n^*} l'instant discret de la première pénétration, peu avant $t = 0.5$. La pénétration est de l'ordre de 10^{-13} et $\dot{u}_c^{n^*} < 0$, si bien qu'à l'itération suivante, la valeur de $p_c^{n^*+1} > 0$ est prise en compte. À l'itération n^*+1 , il n'y a pas pénétration, le contact n'est donc pas activé à l'itération n^*+2 (au temps $t = 0.5$), et la dynamique de l'ensemble de la corde conduit à une nouvelle pénétration. À l'itération n^*+3 , la pénétration en n^*+2 associée à la vitesse négative implique une prise en compte de $p_c^{n^*+3} > 0$. Pour autant, le coefficient de restitution est tel que la corde reste en pénétration. À l'itération n^*+4 , la pénétration est détectée pour n^*+3 et l'on a $p_c^{n^*+4} > 0$, mais cette fois la vitesse $\dot{u}_c^{n^*+3}$ est positive. Si l'on prend cette dernière information en compte, on impose $p_c^{n^*+4} = 0$, sinon on active le contact avec $p_c^{n^*+4} > 0$. Cette dernière option conduit à une injection d'énergie. Imposer $p_c^{n^*+4} = 0$ permet d'éviter cela mais conduit à une pénétration encore plus importante de la corde dans l'obstacle, à cause de la dynamique globale de la corde. Dans ce cas, à l'itération n^*+5 , les conditions sont réunies pour activer le contact mais la loi d'impact avec $\rho = 0.5$ ne permet pas à la corde de sortir de l'obstacle malgré une vitesse positive. Le phénomène se répète et conduit à

un comportement non physique de la corde. Dans ce cas précis, il faut atteindre d'extrêmement grandes valeurs de $F_{e,d}$ pour concilier un comportement physique et une énergie strictement dissipée.

Finalement, imposer la condition sur \dot{u}_c^n , respectée intrinsèquement lorsque $\varrho = 1$, permet d'obtenir une conservation ou dissipation de l'énergie $H_\varrho^{n+\frac{1}{2}}$. Pour $\varrho < 1$, elle doit être imposée explicitement pour être respectée. Cependant, comme nous l'avons vu pour $\varrho = 0.5$, la conservation de l'énergie discrète peut être au prix de comportements non physiques jusqu'à un certain seuil $F_{e,d}$, qui peut s'avérer déraisonnable. Par la suite, la condition sur \dot{u}_c^n n'est pas requise pour appliquer la complémentarité.

3.4 Mise en regard des méthodes régularisante et non régulière

Deux modèles ayant donné lieu à trois schémas numériques ont été présentés pour le contact et le frottement entre une corde vibrante et un obstacle unilatéral. Ils appartiennent à deux grandes familles distinctes : les méthodes régularisantes, que nous avons explorées à travers le schéma mixte décrit dans la section 3.2.1 et le schéma modal décrit dans la section 3.2.2, et les méthodes non régulières, étudiées à travers le schéma exposé dans la section 3.3. Le schéma modal n'est pas exploité par la suite, nous centrons le reste de l'étude sur les méthodes mixte et non régulière. Pour chacune d'entre elles, une comparaison à la solution analytique a été présentée dans le cas d'un obstacle ponctuel. Dans cette section, nous proposons de mettre en regard ces deux méthodes à la lumière des résultats précédents.

Quelques travaux de la littérature proposent une comparaison de méthodes régularisantes et non régulières. Le cas d'un pendule avec frottement sec est présenté dans (THORIN, 2013), où la pertinence de la loi non régulière est mise en exergue pour ce cas particulier. Une application industrielle de la modélisation du contact pour l'étude du crissement de freins est proposée dans (VERMOT DES ROCHES et al., 2012), où les auteurs comparent une loi exponentielle et une loi de Signorini en y associant un frottement dépendant de la force de contact. En ressort notamment la nécessité d'une identification de paramètres de régularisation pour la loi exponentielle, or un tel réglage peut être délicat et s'appuie sur des expériences contrôlées, données auxquelles les industriels n'ont pas toujours accès. Les auteurs montrent cependant qu'un calibrage numérique peut permettre l'obtention de paramètres satisfaisants.

Méthode/propriété	conservation d'énergie	stabilité
Mixte	oui	inconditionnelle
Non régulière	oui si $\varrho = 1$	inconditionnelle
Méthode/propriété	F_e	interpénétration
Mixte	2 MHz	$\propto 10^{-7}$ m
Non régulière	4 MHz	$\propto 10^{-7}$ m
Méthode/propriété	paramètres de contact	paramètres de frottement
Mixte	α, K	A, s
Non régulière	ϱ	A_{NS}

TABLE 3.6 – Comparaison de certaines propriétés des méthodes mixte et non régulière mises en place pour l'étude du contact corde/obstacle, pour les paramètres de simulation précisés dans les sections 3.2.1.5 et 3.3.5.

Le tableau 3.6 compare certaines données pour les deux méthodes, pour les paramètres exposés dans les sections 3.2.1.5 et 3.3.5. Ainsi, le schéma mixte et le schéma non régulier avec $\varrho = 1$ permettent tous deux d'assurer la conservation de l'énergie discrète du système et jouissent d'une stabilité inconditionnelle. Dans les deux cas et pour les paramètres retenus, la pénétration maximale observée (voir les tableaux 3.1 et 3.4) est du même ordre de grandeur, à savoir 10^{-7} m. Un pas de temps grossier pourrait mener à des pénétrations plus élevées. Dans le cas régularisant,

la pénétration est d'autant plus faible que la raideur du contact est grande. En termes de convergence, des résultats sur l'ordre de convergence sont connus dans le cas régulier qui ne le sont pas pour la méthode non régulière; de plus, pour cette dernière, une fréquence d'échantillonnage plus élevée s'est avérée nécessaire pour satisfaire le critère de convergence que l'on s'est fixé ($F_e = 4$ MHz contre 2 MHz pour le schéma mixte, voir les sections 3.2.1.5 et 3.3.5). Par ailleurs, le schéma non régulier ne nécessite l'ajustement que d'un paramètre ϱ , voire d'aucun si l'on impose la conservation de l'énergie, contre deux pour le schéma mixte, α et K , voire quatre si l'on prend en compte des pertes liées au contact à l'aide de l'expression (2.29). De plus, ces deux approches offrent une gestion différente des pertes au contact. Enfin, les deux méthodes ont montré une excellente concordance avec la solution analytique dans le cas d'un obstacle ponctuel centré. Nous verrons dans le chapitre 4, dans lequel une comparaison à des signaux expérimentaux est proposée, que les deux méthodes permettent également une représentation très réaliste de la vibration de la corde; la qualité des résultats observés pour l'expérience menée ne permettra pas de donner une préférence à l'une ou l'autre méthode.

Concernant les modèles de frottement régularisé (section 2.3.1) et non régulier (section 2.3.2), à nouveau, ce dernier ne nécessite l'ajustement que d'un paramètre A_{NS} contre deux pour le modèle de frottement régularisé employé, A et s . Nous verrons lors de la comparaison avec des résultats expérimentaux, dans le chapitre 4, que les deux modèles permettent une reproduction très fidèle de la vibration de la corde réelle. Cela est spécifique au système étudié; dans d'autres configurations, le modèle régularisé pourrait aboutir à des résultats contraires à l'expérience car il ne permet qu'une position d'équilibre (THORIN, 2013).

En termes de temps de calcul, des temps beaucoup plus courts ont été observés avec la méthode non régulière (voir les tableaux 3.3 et 3.5). Toutefois, cette observation reste à confirmer dans le cas d'un obstacle distribué car le schéma non régulier présenté est adapté au cas d'un obstacle ponctuel tandis que le schéma régularisant a été programmé pour un obstacle quelconque. La méthode non régulière ne nécessite pas d'algorithme de type Newton-Raphson à chaque itération, contrairement à la méthode mixte. Cependant elle nécessite la résolution d'un LCP (voir la section 3.3.2), trivial dans le cas d'un obstacle ponctuel, mais qui serait plus complexe à résoudre dans le cas d'un obstacle distribué. En particulier, le logiciel libre SICONOS peut être employé à cette fin. Cette plate-forme a été développée dans le cadre d'un projet européen de 2002 à 2006. Mis à disposition sur <http://siconos.gforge.inria.fr/>, il offre un cadre général pour la modélisation et la simulation de systèmes dynamiques non réguliers. Il est majoritairement développé en Fortran 77, C et C++ et propose une interface principalement en Python.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, trois schémas numériques ont été présentés. Ils répondent à des critères de conservation/dissipation d'énergie et de stabilité. Deux d'entre eux tirent parti d'une régularisation de la force de contact : l'un, dit mixte, s'appuie sur une description modale de la corde et opère le calcul de la force de contact dans l'espace physique; l'autre opère intégralement dans l'espace modal. Ce dernier correspond à une famille de schémas conservatifs, il serait intéressant d'étudier ses propriétés en fonction des coefficients choisis. Cette étude n'ayant pas été menée au cours du doctorat, seul le schéma mixte est employé par la suite. Un troisième schéma a été présenté, il s'appuie sur une approche non régulière du contact et prend en compte d'éventuels sauts de vitesse liés à des impacts. Les schémas mixte et non régulier ont été analysés notamment à travers une comparaison avec la solution analytique dans le cas d'une corde idéale en présence d'un obstacle ponctuel affleurant la corde au repos. Tous deux ont permis une représentation satisfaisante du mouvement de la corde, et en particulier du changement de fréquence fondamentale induit par l'obstacle. Des tests de convergence ont montré, pour chacun, la nécessité d'une fréquence d'échantillonnage élevée pour satisfaire un critère strict que nous nous sommes imposés par souci

de fiabilité des résultats. Enfin, nous avons proposé une comparaison de ces deux approches. Dans le cas étudié, elles présentent des résultats très similaires, toutefois la méthode non régulière nécessite l'identification de moins de paramètres et permet de meilleurs temps de calcul. Dans le chapitre suivant, les simulations numériques sont comparées à des résultats expérimentaux dans le cas d'un obstacle ponctuel. Contrairement à la solution analytique, ils mettent en jeu la dispersion et les amortissements de la corde et permettent ainsi d'éprouver plus avant les modèles proposés.

Troisième partie

Comparaisons et applications

Chapitre 4

Contact entre une corde vibrante et un obstacle ponctuel : simulations et expériences ¹

Dans ce chapitre, nous présentons une étude approfondie du contact entre une corde vibrante isolée et un obstacle localisé en un unique point. Nous choisissons cette configuration afin de mieux contrôler spatialement le comportement du système au niveau du contact ; de plus, lorsque l'obstacle est centré, ce problème jouit d'une solution analytique présentée dans la section 2.4 et constitue ici un cas de référence. Nous verrons que le comportement de la corde, bien que l'obstacle soit élémentaire, est d'une grande richesse.

Cette étude se manifeste à travers une comparaison détaillée de résultats expérimentaux et de simulations numériques sur des temps longs. Ces dernières sont obtenues à l'aide des méthodes mixte (voir la section 3.2.1) et non régulière (voir la section 3.3). Cette confrontation permet ainsi, en plus de l'observation du comportement de la corde, d'éprouver les modèles numériques.

Ces investigations ont donné lieu, dans le cas de la méthode mixte, à l'article (ISSANCHOU et al., 2017a) et aux publications de congrès (ISSANCHOU et al., 2016b ; ISSANCHOU et al., 2016a).

Pour mener à bien la comparaison entre expériences et simulations, un protocole expérimental fiable doit être mis en place qui permette une observation pertinente du mouvement de la corde.

4.1 Protocole expérimental

Nous souhaitons étudier le mouvement d'une corde isolée, découplée de toute structure résonante, afin que la vibration de la corde n'en soit pas affectée. Obtenir expérimentalement des conditions aux limites respectant cette hypothèse nécessite certaines précautions. À cette fin, nous utilisons un banc de mesure dont nous donnons une description dans la section 4.1.1, sur lequel nous mettons en place des capteurs de déplacement décrits dans la section 4.1.2. Le processus d'excitation initiale de la corde est détaillé dans la section 4.1.3, et un circuit électrique dédié à la détection des contacts est présenté dans la section 4.1.4.

4.1.1 Description du banc de mesure

Le banc de corde utilisé est présenté sur la figure 4.1. Il a été mis en place et éprouvé quelques décennies auparavant notamment par CUESTA et al. (1988) et plus récemment par PATÉ (2014). Le banc est constitué d'une poutre I.P.N. métallique sur laquelle deux blocs P.V.C. peu résonants sont fixés, à l'intérieur desquels des mandrins peuvent coulisser et maintiennent les extrémités de la corde. La poutre I.P.N. est placée dans du sable, de manière à ce que les vibrations de la corde qui lui seraient malgré tout transmises soient atténuées (CUESTA et al., 1988).

1. Les sons associés à cette étude sont disponibles sur :
<http://www.lam.jussieu.fr/Membres/Issanchou/PhD.html>.
Ils correspondent au déplacement de la corde rééchantillonné à 44.1 kHz.

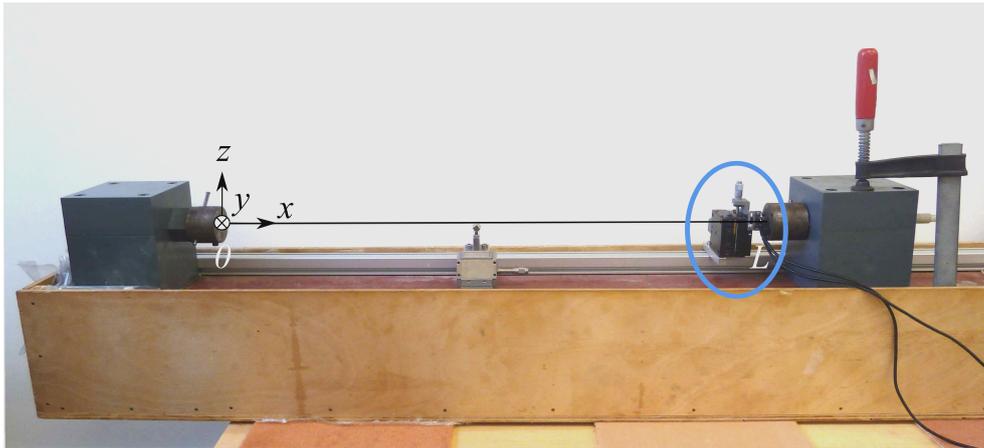


FIGURE 4.1 – Banc de corde. La position des capteurs, près de $x = L$, est repérée par un ovale bleu.

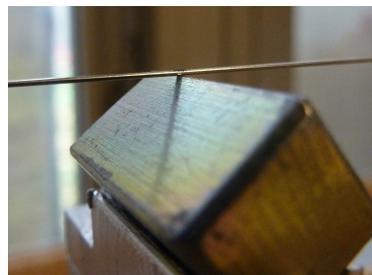


FIGURE 4.2 – Obstacle ponctuel : arête de pavé métallique.

L	d	T	μ	B
1.002 m	0.43 mm	180.5 N	$1.17 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}$	1.78×10^{-5}

TABLE 4.1 – Propriétés physiques de la corde.

Nous avons installé sur le banc une corde de guitare électrique métallique monofilament, fabriquée par D’Addario et dont les propriétés issues de mesures sont données dans le tableau 4.1. Dans cette étude, l’obstacle affleure la corde au repos. Il est réalisé avec une arête de pavé métallique (voir la figure 4.2), et monté sur un élévateur vertical de sensibilité micrométrique.

Pour mesurer les vibrations de la corde, nous avons eu recours à des capteurs de déplacement décrits dans la section suivante.

4.1.2 Capteurs de déplacement

Les déplacements verticaux et horizontaux de la corde vibrante sont mesurés à l’aide de fourches optiques OPB815L de OPTEK Technology Inc., dont le principe est de capter des variations d’intensité lumineuse sur un phototransistor. Le diamètre du faisceau vaut environ 1 mm (LE CARROU et al., 2014). Les fourches optiques sont situées à 1 cm (mouvement vertical) et 2 cm (mouvement horizontal) de l’extrémité $x = L$. Les signaux sont obtenus avec une fréquence d’échantillonnage de 51200 Hz. Les capteurs envoient un signal de tension (V). Afin de connaître le déplacement correspondant (m), on peut utiliser la courbe de conversion théorique proposée dans (LE CARROU et al., 2014), sous certaines hypothèses telles que l’homogénéité de l’opacité de la corde et pour des mouvements de l’ordre de grandeur du diamètre du faisceau. Dans le cas étudié ici néanmoins, la corde a un diamètre de 0.43 mm, relativement petit par rapport à celui du faisceau émis par la diode de la fourche optique. De ce fait, les tensions mesurées sont proches des

valeurs maximales des capteurs pour lesquelles les incertitudes liées à la courbe de conversion donnée dans (LE CARROU et al., 2014) sont plus élevées.

Afin de ne pas souffrir de l'incertitude importante qui advient dans ce cas avec la courbe de conversion théorique, nous avons choisi de calibrer expérimentalement les capteurs, c'est-à-dire de déterminer directement la correspondance entre des tensions mesurées et des déplacements imposés. Cela permet également de passer outre les erreurs du modèle dues aux effets de bord de la corde (LE CARROU et al., 2014). Ainsi, une courbe de calibrage a été obtenue expérimentalement par pas de $2 \mu\text{m}$, afin de s'assurer d'une conversion fiable des volts en mètres.

L'incertitude de répétabilité de la fourche u_{rep} et l'incertitude liée à la lecture de la graduation u_g doivent être prises en compte, et résultent en une incertitude totale $u = \sqrt{u_{rep}^2 + u_g^2}$. De plus, nous interpolons les points de la courbe obtenue, ce qui induit également une erreur, non prise en compte ici. L'erreur due à la répétabilité est obtenue pour chaque point en répétant 10 fois la mesure. Quant à l'incertitude liée à la lecture de la graduation, nous choisissons de la déterminer en quittant et en revenant à une graduation donnée 10 fois, et en mesurant à chaque fois la tension correspondante. Sous une hypothèse de comportement gaussien des variables observées, l'incertitude est obtenue en divisant l'écart-type expérimental par la racine carrée du nombre de mesures effectuées. Elle est ensuite ici donnée avec un intervalle de confiance à 95 %.

La figure 4.3 présente d'une part la courbe de conversion théorique calculée d'après (LE CARROU et al., 2014), et d'autre part la courbe obtenue expérimentalement, cette dernière étant déterminée uniquement sur un domaine d'intérêt pour les signaux traités par la suite. Les incertitudes expérimentales ne sont pas visibles car elles sont de l'ordre de 10^{-3} V. On constate que les deux courbes se distinguent significativement, ce qui met en évidence l'importance du calibrage expérimental dans le cas d'un diamètre de corde petit par rapport au diamètre du faisceau de la fourche.

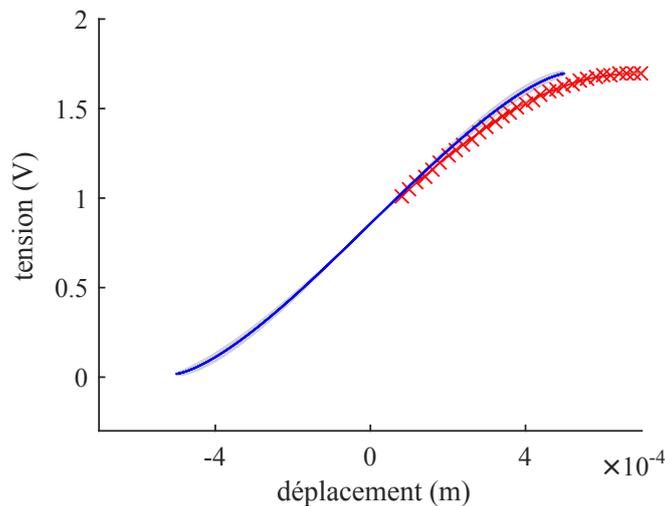


FIGURE 4.3 – Comparaison des courbes de conversion théorique (trait bleu), expérimentale (trait et croix rouges), et incertitudes avec intervalle de confiance à 95% (gris).

La corde installée sur le banc de corde et les capteurs de déplacement mis en place, il faut ensuite définir l'excitation de la corde, qui doit être pertinente et répétable.

4.1.3 Excitation de la corde

Plusieurs méthodes d'excitation de la corde ont été envisagées, l'objectif étant d'obtenir une excitation simple à réaliser, sans vitesse initiale, qui relâche la corde de manière la plus instantanée possible et qui soit répétable.

La première méthode employée a consisté à passer un fil de nylon autour de la corde, de le faire passer par des poulies et d'attacher une masse à l'extrémité (CARACALLA et al., 2015; ISSANCHOU et al., 2015), ce qui donne la possibilité d'obtenir simplement des amplitudes initiales variées en modifiant simplement la masse suspendue. Le fil est alors brûlé à l'instant initial. On peut montrer que cette excitation est répétable, cependant la durée nécessaire pour que le fil de nylon n'interagisse plus avec la corde ne s'avère pas suffisamment courte pour ne pas perturber le signal, en particulier pour des masses correspondant à de petits déplacements de la corde.

Suite à cette observation, nous avons opté pour une méthode différente, notamment mise à profit dans (WOODHOUSE, 2004; PATÉ, 2014), qui consiste à passer un fil de cuivre autour de la corde et à tirer sur ce fil jusqu'à sa rupture. Dans (SMIT et al., 2010), les auteurs ont mis en place un système faisant usage d'un solénoïde afin d'automatiser la mise en tension du fil avant sa rupture. Par souci de simplicité, nous avons choisi d'effectuer cette tâche manuellement. Le fil cassant toujours à la même force appliquée, la répétabilité tient à la précision de l'opérateur. Elle est mise en évidence dans la suite de ce chapitre. Avec ce type de pincement, la perturbation mentionnée lors de l'utilisation d'un fil de nylon n'apparaît plus. On notera que si l'on coupe le fil de cuivre au lieu de tirer dessus, ce qui implique une rupture au-dessus de la corde, le signal en est à nouveau perturbé, bien que dans une moindre mesure. Nous choisissons donc finalement d'exciter la corde par rupture d'un fil de cuivre.

Nous disposons de fils de diamètres 0.05, 0.1 et 0.15 mm nous permettant de faire varier l'amplitude initiale. Dans ce chapitre, la corde est pincée en son milieu avec un fil de cuivre de diamètre 0.05 mm. Cela correspond à un déplacement initial maximal $u_{0,max}$ d'environ 1.5 mm.

Nous décrivons à présent le dispositif employé pour l'observation du comportement de la corde au point de contact.

4.1.4 Détection du contact

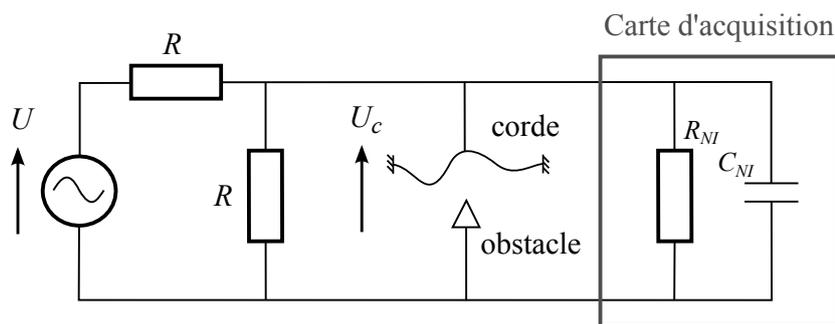


FIGURE 4.4 – Schéma électrique pour la détection du contact.
 $U = 0.5 \text{ V}$, $R = 100 \text{ k}\Omega$, $R_{NI} = 300 \text{ k}\Omega$, $C_{NI} = 10.4 \text{ pF}$.

Afin de détecter les contacts entre la corde et l'obstacle, un circuit électrique a été installé sur le banc de mesure (voir la figure 4.4). La corde d'une part et l'obstacle d'autre part, tous deux conducteurs, constituent un interrupteur. La tension à ses bornes est mesurée comme un indicateur de contact, nul lorsque la corde touche l'obstacle, c'est-à-dire lorsque l'interrupteur est fermé.

L'étude des contacts électriques correspond à un domaine scientifique spécifique, voir par exemple (CHEN et al., 1994). L'ouverture du contact peut provoquer l'apparition de surtensions, favorisées par des comportements inductifs dans le circuit. La présence de vapeur d'eau et autres composés atmosphériques peut alors provoquer la corrosion des contacts. Afin de limiter les phénomènes de surtension et de protéger les surfaces de contact de la corrosion que peuvent provoquer les arcs, plusieurs mesures ont été mises en place. Tout d'abord, le courant a été limité en transformant la source de tension en source à résistance élevée ($R_{\text{eq}} = 50 \text{ k}\Omega$) se rapprochant d'une source de courant et offrant une dérivation de courant. De plus, nous avons utilisé une source alternative afin de rendre symétrique les éventuelles altérations. Par ailleurs, l'utilisation de signaux alternatifs permet de mettre en œuvre des techniques performantes de détection, comme par exemple la détection synchrone. Dans le cadre de nos travaux, cette technique n'a pas été employée, une détection simple s'avérant suffisante. Nous avons choisi une tension alternative de fréquence 10 kHz afin d'obtenir une visibilité nette des intervalles de temps sans contact, tout en restant en-deçà de la fréquence de Shannon de la carte d'acquisition (25600 Hz). Enfin, la capacité de la carte d'acquisition associée à la résistance équivalente du circuit ($R_{\text{eq,totale}} \approx 43 \text{ k}\Omega$) induit une constante de temps $\tau_{\text{CI,c}} \approx 0.45 \mu\text{s}$ suffisamment petite pour ne pas perturber significativement la détection du contact.

Le protocole expérimental pour l'observation du mouvement de la corde sur le banc de mesure ainsi mis en place, il peut être mis à contribution dans notre étude. Il s'agit, dans un premier temps, d'extraire les informations liées aux fréquences propres et amortissements de la corde, afin qu'elles puissent être intégrées aux modèles numériques.

4.2 Identification des caractéristiques linéaires

Pour identifier les caractéristiques linéaires de la corde, *i.e.* les fréquences propres et coefficients d'amortissement, les vibrations libres de la corde sans obstacle sont mesurées et analysées à l'aide de l'algorithme ESPRIT (ROY et al., 1986). La corde est pour cela pincée proche d'une extrémité, afin qu'un grand nombre de modes soient présents, et selon une seule polarisation. Le traitement est appliqué sur 4 s du signal à partir de 0.2 s après le pincement de la corde, de manière à analyser le signal dans le régime libre de la corde, au-delà du transitoire. Les modes sont traités un à un, selon la procédure décrite dans (LE CARROU et al., 2009; PATÉ et al., 2014) : pour chaque mode considéré, la fréquence correspondante est centrée autour de 0 Hz, le signal est filtré autour de cette fréquence et décimé pour réduire les coûts de calcul, puis le nombre de composantes est évalué avant l'application de l'algorithme ESPRIT (LE CARROU et al., 2009). Plusieurs résultats dont la fréquence est proche de celle attendue peuvent être obtenus par cette procédure, il faut alors sélectionner le plus pertinent. Nous avons en général choisi celui dont l'énergie était la plus élevée. Les caractéristiques linéaires de 36 modes sont ainsi obtenues, couvrant une plage fréquentielle de 196 à 7200 Hz environ. Au-delà de cette fréquence, les modes ne sont plus suffisamment excités et le rapport signal sur bruit est trop faible pour permettre une identification fiable. Pour déterminer les valeurs restantes, les modèles théoriques (2.18) et (2.19) sont employés, en considérant une mobilité aux extrémités nulle sur le banc de corde. Dans ces modèles, le facteur d'inharmonicité $B = 1.78 \times 10^{-5}$ et les paramètres $\delta_{\text{ve}} = 4.5 \times 10^{-3}$ et $Q_{\text{te}}^{-1} = 2.03 \times 10^{-4}$ sont déterminés d'après les mesures. Enfin, des valeurs usuelles de η_{air} et ρ_{air} sont choisies (PATÉ et al., 2014) : $\eta_{\text{air}} = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et $\rho_{\text{air}} = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$.

Les valeurs mesurées, les incertitudes associées (obtenues sur neuf mesures et couvrant les erreurs de répétabilité et l'incertitude de la méthode de traitement), les résultats des modèles théoriques et les erreurs entre mesure et théorie sont présentés sur la figure 4.5. On peut observer que l'inharmonicité de la corde (et donc sa raideur en flexion) est très faible. Par ailleurs, les modèles donnent une représentation très précise des fréquences et amortissements mesurés. Les incertitudes sur les fréquences sont de l'ordre de 0.1 %, non visibles sur la figure 4.5(a). Les erreurs entre modèles et mesures sur les fréquences et facteurs de qualité, hormis pour le deuxième partiel,

sont respectivement inférieures à 0.2 % et 25 %.

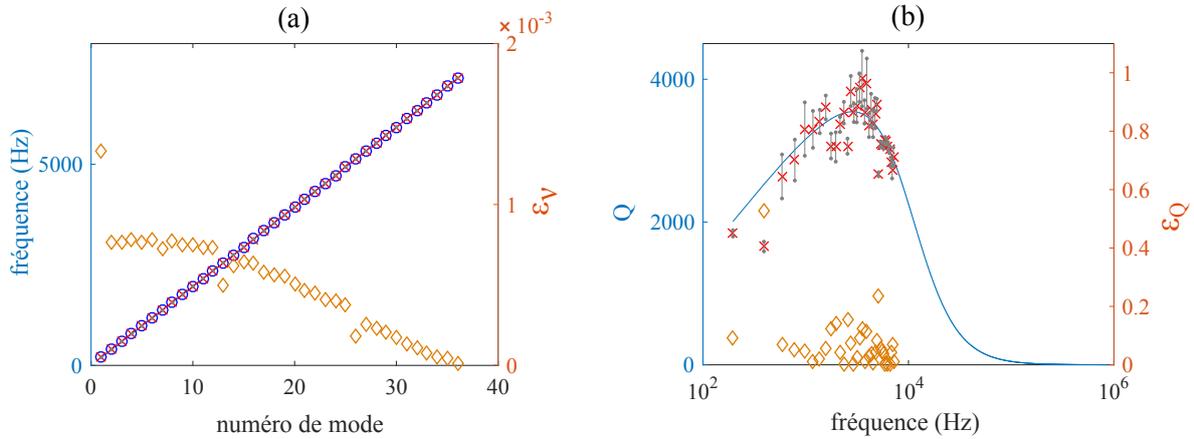


FIGURE 4.5 – Corde isolée. (a) Fréquences propres expérimentales (croix rouges) et théoriques (cercles bleus), ν_m et ν_{th} respectivement, incertitude étendue à 95 % (traits gris) et erreur relative $\epsilon_\nu = \frac{|\nu_{th} - \nu_m|}{\nu_m}$ (losanges oranges). (b) Facteurs de qualité expérimentaux (crois rouges) et théoriques (trait bleu), Q_m et Q_{th} respectivement, incertitude étendue à 95 % (traits gris) et erreur relative $\epsilon_Q = \frac{|Q_{th} - Q_m|}{Q_m}$ (losanges oranges).

Les valeurs de fréquences et amortissements obtenues peuvent à présent être intégrées dans les modèles numériques décrits dans le chapitre 3, et l'on peut comparer résultats numériques et expérimentaux.

4.3 Confrontation des signaux numériques et expérimentaux

Dans cette section, des signaux numériques obtenus avec la méthode mixte et la méthode non régulière (voir les sections 3.2.1 et 3.3) sont comparés à des données expérimentales sur des temps longs, dans les domaines temporel et fréquentiel. Trois cas sont considérés : la corde vibrante sans et avec obstacle ponctuel, celui-ci étant situé soit au milieu de la corde, soit proche d'une extrémité. Cette dernière configuration constitue un chevalet double et correspond à une modélisation du chevalet d'une tampoira.

Les paramètres de la corde et du schéma numérique sont précisés dans les tableaux 4.1 (page 66) et 3.2 (page 41). Les fréquences d'échantillonnage sont précisées au cas par cas, elles répondent au critère de convergence décrit dans le chapitre précédent (section 3.2.1.5). Dans l'ensemble des résultats expérimentaux présentés ici, hormis lorsqu'une autre condition est explicitée, la condition initiale est dans le plan (xOz) , si bien que l'énergie donnée à la polarisation horizontale est nulle. Expérimentalement, les vibrations dans ce plan ont été observées comme négligeables pour les déplacements initiaux considérés.

Nous présentons tout d'abord la vibration de la corde sans obstacle. Un obstacle ponctuel centré ou proche d'une extrémité est ajouté par la suite.

4.3.1 Sans obstacle

Dans le cas sans obstacle, les méthodes mixte et non régulière sont strictement équivalentes. La figure 4.6 montre une comparaison du signal expérimental et du résultat numérique, sans obstacle. Ils correspondent au déplacement de la corde au niveau de la fourche optique placée à 1 cm de l'extrémité $x = L$. Les effets de la dispersion sont clairement visibles pendant les premières périodes : la forme d'onde présente un aspect en créneaux sur lesquels des oscillations plus rapides apparaissent, qui correspondent aux hautes fréquences se déplaçant plus rapidement.

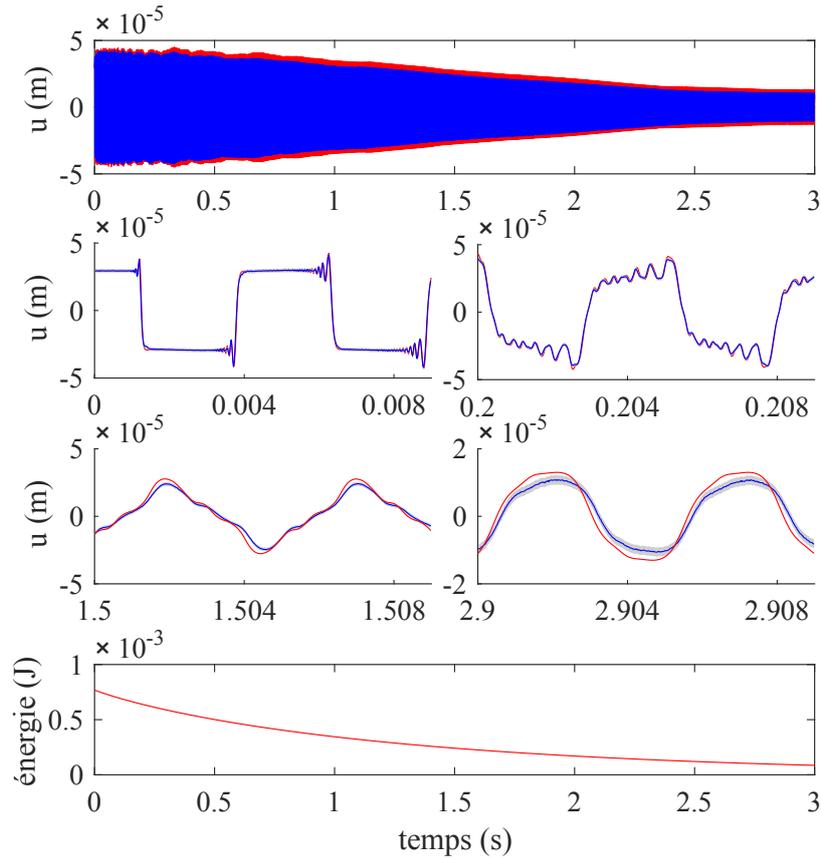


FIGURE 4.6 – Déplacement de la corde vibrante sans obstacle. Comparaison entre la mesure (trait bleu) et la simulation numérique (trait rouge), $F_e = 51200$ Hz : déplacement vertical à 1 cm de l'extrémité $x = L$. Incertitude étendue à 95 % (gris). En bas : décroissance temporelle de l'énergie du signal numérique.

Cette forme évolue à cause des pertes et de la dispersion, de la même manière expérimentalement et numériquement. On observe une légère erreur d'amplitude sur la forme globale (figure 4.6), qui ne semble pas être due à une erreur d'amplitude dans la condition initiale du signal numérique. Elle pourrait résulter d'une légère erreur d'estimation des amortissements, dont nous rappelons qu'ils sont mesurés pour les 36 premiers modes, puis associés à un modèle théorique pour les modes plus élevés (voir la section 4.2).

Les spectrogrammes du signal expérimental et de la simulation numérique sont comparés sur la figure 4.7, soulignant la similarité des contenus spectro-temporels. Étant donnée la condition initiale (fonction paire par rapport au milieu de la corde), les modes impairs ne devraient pas être excités. On peut observer des traces de ceux-ci sur le spectrogramme expérimental, toutefois leur niveau est inférieur à celui du premier mode de plus de 60 dB. Leur présence est liée à de petites imperfections de la corde, des conditions aux limites, ou de la symétrie de la condition initiale. Dans la simulation, les modes impairs sont totalement absents, l'excitation étant dans ce cas parfaitement symétrique. Enfin, l'amortissement des modes les plus élevés semble être légèrement sous-estimé dans la simulation numérique, puisque leur énergie reste visible environ 0.1 s plus longtemps sur les spectrogrammes. Cela appuie l'observation précédente concernant la légère erreur d'amplitude du signal temporel.

On observe finalement une excellente concordance entre simulation et expérience en l'absence d'obstacle, ce qui souligne la qualité des modèles et de l'identification des caractéristiques linéaires proposés. Nous incluons à présent un obstacle ponctuel, centré dans un premier temps.

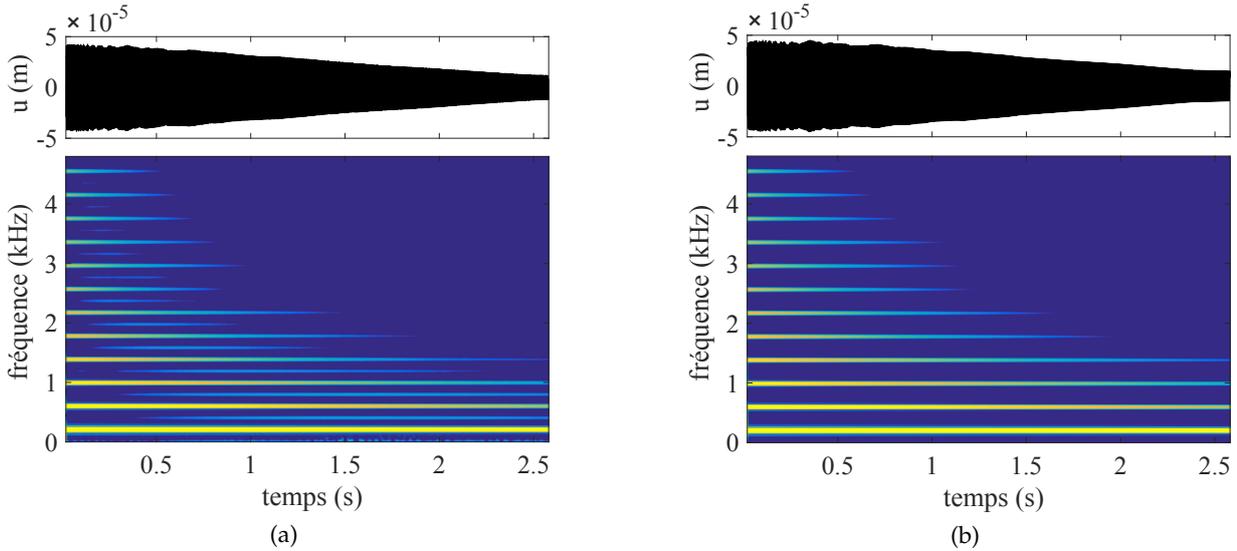


FIGURE 4.7 – Corde vibrante sans obstacle. Spectrogrammes du déplacement en dB avec une dynamique de 70 dB : (a) expérimental, (b) numérique.

4.3.2 Obstacle ponctuel centré, méthode mixte

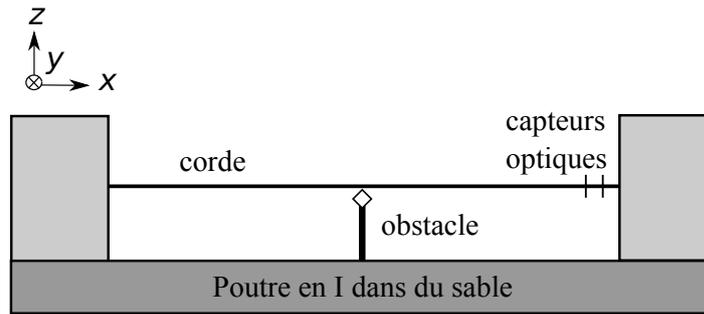


FIGURE 4.8 – Représentation schématique du banc de mesure.

Dans cette section, la vibration d’une corde en présence d’un obstacle ponctuel centré est examinée (voir la figure 4.8). Nous travaillons ici avec la méthode mixte dont les paramètres sont rappelés dans le tableau 4.2, la méthode non régulière (décrite dans la section 3.3) est employée par la suite, dans la section 4.3.3.

N	α	K	β
1002	1.5	10^{13}	0

TABLE 4.2 – Paramètres numériques pour la méthode mixte.

La corde est tout d’abord excitée dans le plan (xOz) , le contact est ensuite étudié en détail, puis la seconde polarisation est considérée.

4.3.2.1 Description temporelle et fréquentielle

La figure 4.9 montre le signal expérimental et le résultat numérique dans le cas d’un obstacle ponctuel centré et d’une condition initiale selon (Oz) . De même que dans la section 4.3.1, des similarités peuvent être observées, aussi bien dans la forme globale du signal que dans le détail de son comportement. Le rapport entre les fréquences numériques sans obstacle f_s et avec l’obstacle centré f_a satisfait $\frac{f_s}{f_a} \approx \frac{195.7}{261.3} \approx \frac{3}{4}$, comme décrit par la théorie (voir l’annexe B). Des

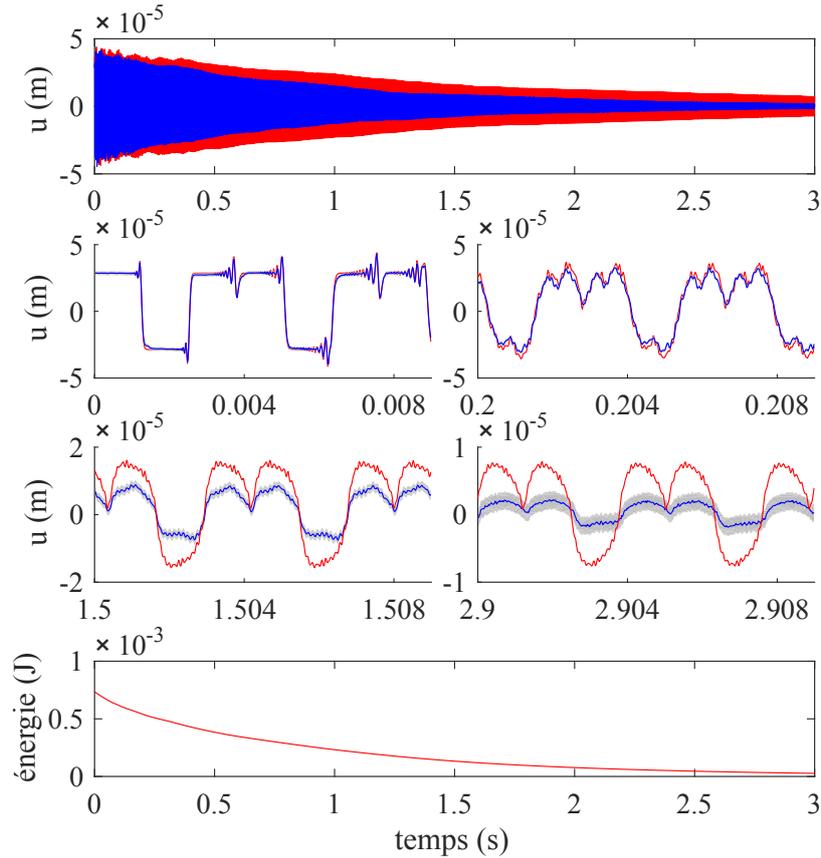


FIGURE 4.9 – Déplacement vertical de la corde vibrante à 1 cm de l’extrémité $x = L$, en présence d’un obstacle ponctuel centré. Comparaison entre la mesure (trait bleu) et la simulation numérique *via* la méthode mixte, $F_e = 2$ MHz (trait rouge). Incertitude étendue à 95 % (gris). En bas : décroissance temporelle de l’énergie du signal numérique.

caractéristiques fines du signal expérimental sont fidèlement reproduites numériquement, comme le montrent les zooms de la figure 4.9. En particulier, on retrouve les creux liés aux pertes et à la dispersion, mis en évidence dans la section 3.2.1.7. La dynamique incluant le contact est bien reproduite, et la forme d’onde numérique évolue de manière semblable à celle de la mesure. Toutefois, une erreur significative en amplitude apparaît, qui peut être due à l’incertitude sur les position et hauteur de l’obstacle ; cependant une erreur sur la hauteur de l’obstacle induirait une variation de fréquence fondamentale que l’on n’observe pas. Cela peut également être lié à un obstacle rigide imparfait, dont la dynamique perturberait la vibration de la corde. On notera que l’ajout de pertes au contact selon l’équation (3.21) réduit l’amplitude, si bien que la forme globale numérique correspond davantage à la forme globale expérimentale. Cependant, ce résultat est obtenu au détriment de la forme d’onde dès les premières périodes, comme illustré sur la figure 4.10. Dans la suite, nous n’introduisons donc pas d’amortissement au contact (*i.e.* $\beta = 0$). Une autre source d’erreur pourrait être liée à la condition initiale ou à des conditions aux limites non idéales, cependant nous avons vu dans le cas sans obstacle (voir la section 4.3.1) qu’elles n’impliquaient *a priori* pas de telles erreurs. Enfin, il est possible qu’une erreur d’estimation des amortissements se fasse davantage ressentir dans le cas avec obstacle par rapport au cas sans obstacle, dans le cas où ces erreurs seraient plus importantes en hautes fréquences. En effet, des transferts d’énergie vers les hautes fréquences ont lieu et donnent un poids supplémentaire à celles-ci tout au long du signal ; cela est mis en évidence par la suite à travers une observation temps-fréquence des signaux.

Les spectrogrammes du signal expérimental et du résultat numérique sont montrés sur la figure 4.11. Ils présentent à nouveau de fortes similitudes. Les modes étant couplés par le contact, il n’y a pas de mode manquant, contrairement au cas sans obstacle. Une caractéristique notable est la

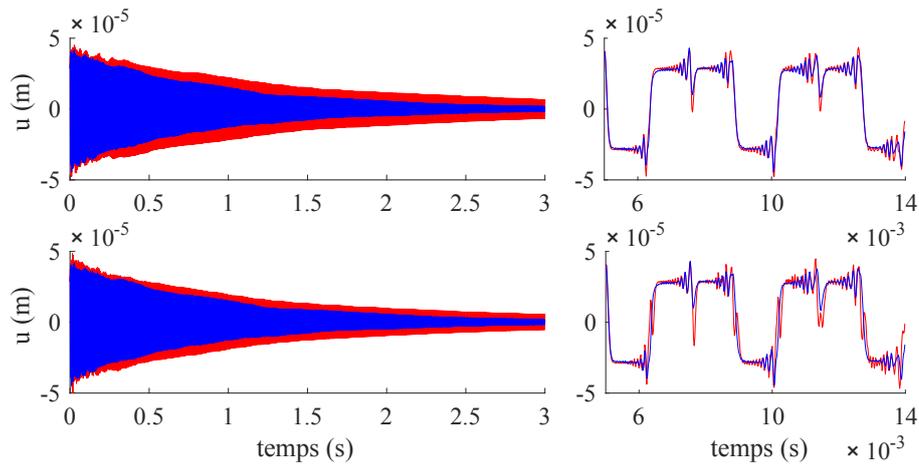


FIGURE 4.10 – Déplacement de la corde vibrante en présence d’un obstacle ponctuel centré, expérimental (trait bleu) et numérique *via* la méthode mixte (trait rouge), en incluant des pertes aux contact telles que $\beta = 500$ (haut) et $\beta = 1000$ (bas).

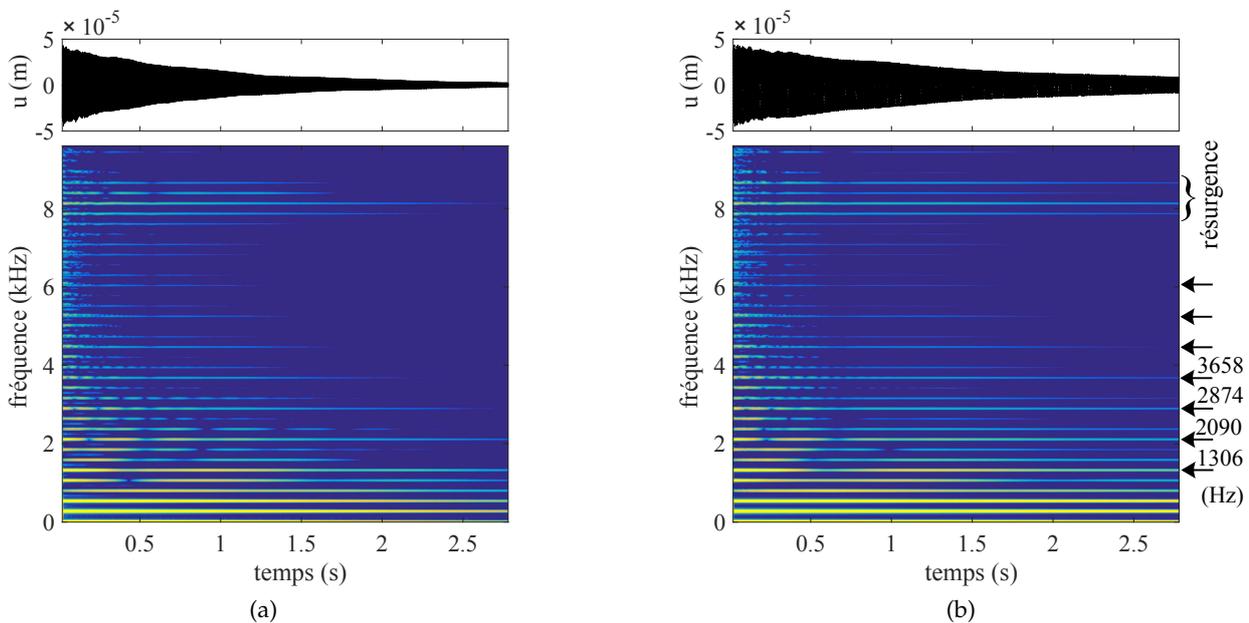


FIGURE 4.11 – Obstacle centré. Spectrogrammes en dB avec une dynamique de 70 dB : (a) expérimental, (b) numérique (méthode mixte), $F_e = 2$ MHz.

résurgence spectrale autour de 8 kHz, mise en exergue à l’aide d’une accolade sur la figure 4.11(b). Celle-ci apparaît clairement sur les spectrogrammes à la fois expérimental et numérique, montrant que l’énergie peut être transférée *via* le contact à des fréquences élevées. Elle est uniquement présente lorsque la dispersion de la corde est prise en compte. La dispersion implique une propagation plus rapide des hautes fréquences; celles-ci arrivent « en avance » au niveau de l’obstacle qui les met alors en exergue. Une autre caractéristique distinctive des spectrogrammes est la présence de pics fréquentiels d’amplitude plus élevée, autour de 1306 Hz, 2090 Hz, 2874 Hz, 3658 Hz, La différence entre deux de ces pics successifs vaut 784 Hz, ce qui semble indiquer qu’une règle gouverne leur position. Cette valeur 784 Hz peut être reliée au rapport 3/4 observé précédemment entre les fréquences fondamentales de la corde sans (196 Hz) et avec obstacle (261 Hz), puisque l’on a : $784 = 196 \times 4 \approx 261 \times 3$. La quantité 784 Hz semble ainsi s’apparenter au plus petit commun multiple des fréquences fondamentales avec et sans obstacle. De plus, la période adimensionnée associée à 784 Hz vaut 0.5. Si l’on se réfère à la figure 3.7, on peut observer

que, dans les figures 3.7(c) et 3.7(d), un évènement intervient toutes les 0.5 unités de temps, l'évènement étant soit un changement de signe soit un creux indiqué par une flèche. Cela pourrait expliquer l'importance de ces fréquences dans les spectrogrammes. Enfin, on peut observer que la fréquence 522 Hz ($1306 - 784$ Hz) doit *a priori* être comprise dans la série. Ce partiel étant le second du signal, il se trouve parmi les fréquences les moins amorties et n'apparaît donc pas aussi clairement sur le spectrogramme que les valeurs suivantes de la série, à partir de 1306 Hz.

4.3.2.2 Instants de contact

Dans la configuration d'un obstacle centré affleurant la corde au repos, d'après la solution analytique présentée dans la section 2.4, le contact est persistant tant que la corde est dans le plan (xOz) , $z \leq 0$, c'est-à-dire sous sa position au repos. Dans cette section, l'objectif est de confronter ce résultat aux observations expérimentales et numériques. Pour cela, le protocole décrit dans la section 4.1.4 est mis en place. La figure 4.12 montre le signal expérimental et le résultat numérique. L'indicateur de contact expérimental correspond à la tension mesurée entre la corde et l'obstacle. Celle-ci est nulle lorsqu'il y a contact et oscille sinon, du fait du courant alternatif haute fréquence imposé. Pendant les premières périodes, le contact est clair et persistant expérimentalement. Cependant, au fil du temps, il devient plus confus, probablement à cause de la complexification de la forme d'onde, associée aux incertitudes de mesure.

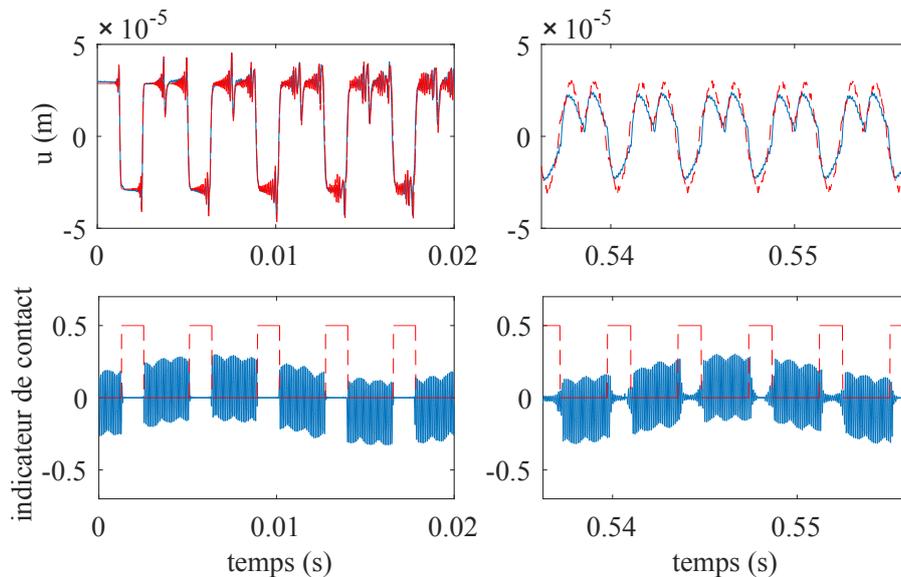


FIGURE 4.12 – En haut : déplacement de la corde en présence d'un obstacle ponctuel centré, expérimental (trait bleu) et numérique *via* la méthode mixte (trait rouge pointillé). En bas : tension mesurée entre la corde et l'obstacle (trait bleu) et fonction indicatrice du contact (trait rouge pointillé).

Les résultats numériques sont obtenus avec les mêmes paramètres que précédemment (voir le tableau 4.2, avec $F_e = 2$ MHz). D'après la valeur de la fonction indicatrice du contact, valant 0.5 en cas de contact et 0 sinon, le contact est persistant. Plus précisément, au point de contact, le mouvement de la corde présente de rapides oscillations, cependant cela n'affecte pas la fonction de contact car les oscillations ont une amplitude de l'ordre de 10^{-8} m, ce qui reste inférieur à la pénétration de la corde dans l'obstacle, de l'ordre de 10^{-7} m. La corde oscille donc sous sa position de repos et la détection de contact reste positive. Ce comportement est fortement dépendant du choix de α et K . Des paramètres correspondant à une plus grande raideur affectent la persistance du contact car la pénétration est réduite. Par exemple, pour $\alpha = 1.3$ et $K = 10^{13}$, la pénétration vaut autour de 10^{-8} m et les premières oscillations interviennent au voisinage de 0, si bien que la fonction indicatrice du contact oscille au début de chaque créneau. Cette observation donne une nouvelle perspective de réglage pour K et α ; le comportement local au niveau de l'obstacle pourrait être un critère supplémentaire pour le choix de ces valeurs.

4.3.2.3 Mouvement 3D de la corde

Jusqu'ici, la condition initiale était donnée selon (Oz) uniquement. Nous considérons à présent une condition initiale impliquant les polarisations selon (Oz) et (Oy) , dans le cas d'un obstacle ponctuel centré. L'excitation de la corde est ainsi similaire à celle mise en œuvre précédemment, avec pour différence que l'on donne approximativement la même amplitude (environ 1 mm) aux deux polarisations transversales. Le plan d'oscillation résultant est donc autour de 45 degrés dans le plan (yOz) . Les points de mesure étant légèrement décalés d'une polarisation à l'autre, le déplacement v mesuré présente une plus grande amplitude initiale que le déplacement u .

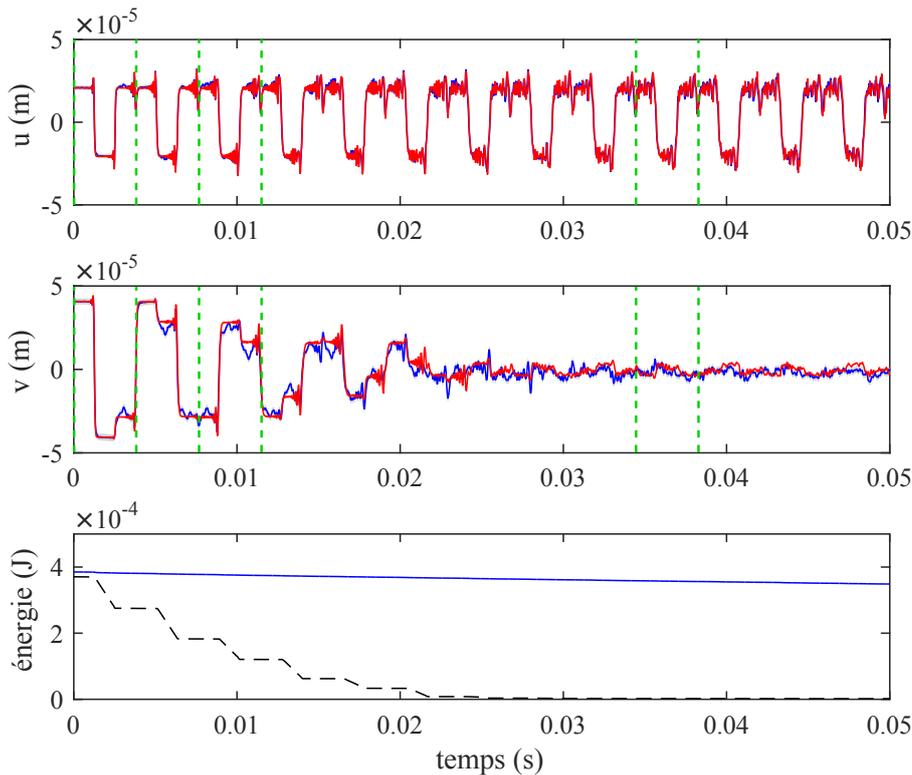


FIGURE 4.13 – En haut et au centre : déplacement de la corde selon (Oz) en $x = L - 10$ mm et (Oy) en $x = L - 20$ mm respectivement, en présence d'un obstacle ponctuel centré, expérimental (trait bleu) et numérique *via* la méthode mixte, $F_e = 2$ MHz (trait rouge). Incertitude étendue à 95% (gris, peu visible car petite). Les traits pointillés verts délimitent les périodes observées dans la figure 4.14. En bas : énergie des signaux numériques u , en $x = L - 10$ mm (trait bleu) et v , en $x = L - 20$ mm (trait noir pointillé).

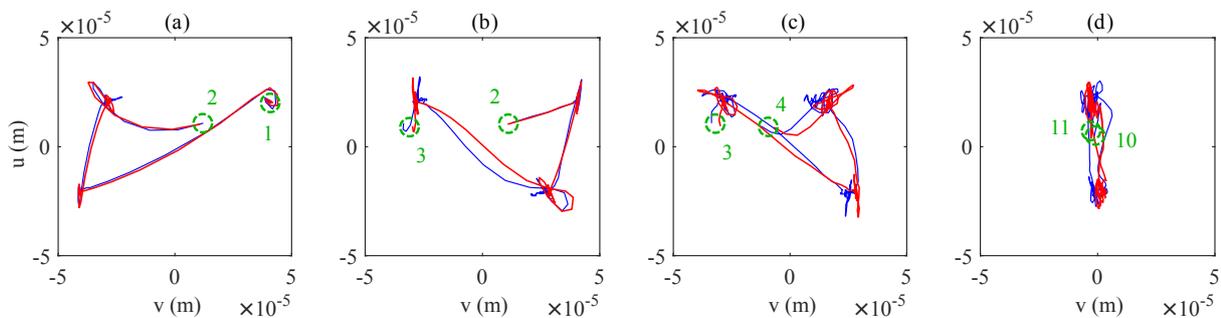


FIGURE 4.14 – Déplacement de la corde selon (Oz) (en $x = 992$ mm) en fonction du déplacement selon (Oy) (en $x = 982$ mm), obtenu expérimentalement (trait bleu) et avec la méthode mixte (trait rouge), $F_e = 2$ MHz. Les traits pointillés verts indiquent les début et fin des zones temporelles considérées. (a) 1^{ère} période (b) 2^{ème} période (c) 3^{ème} période (d) 10^{ème} période.

Les données expérimentales et les résultats numériques sont présentés sur la figure 4.13, avec pour paramètres de la force de frottement (voir la section 2.3.1) $s = 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$ et $A = 120 \text{ N.m}^{-1}$, déterminés empiriquement. Les autres paramètres sont inchangés. La figure 4.14 offre une vision différente du mouvement de la corde en présentant le déplacement u en fonction de v .

Une première observation concernant la figure 4.13 et qui se retrouve sur la figure 4.14 concerne la décroissance très rapide de l'amplitude des oscillations selon (Oy) . En effet, ce mouvement s'annule après environ 0.025 s tandis que le mouvement selon (Oz) se poursuit pendant plusieurs secondes. Cette décroissance rapide selon (Oy) se retrouve dans le signal d'énergie. Les instants de plus grande décroissance de l'énergie interviennent pendant les temps de contact, pendant lesquels un frottement est appliqué sur v . Un deuxième commentaire concerne la qualité de la reproduction par le schéma numérique des détails de cette décroissance selon (Oy) , hormis de légères différences (de quelques μm) lorsque la corde touche l'obstacle. Elles peuvent être dues à d'éventuelles aspérités de l'obstacle, non incluses dans le modèle ; cela affecte également légèrement le déplacement selon (Oz) . Par ailleurs, la figure 4.14 met en évidence des rotations successives d'environ 45 degrés du plan de vibration de la corde, ce qui aboutit en particulier à une différence d'environ 90 degrés entre les plans de vibration principaux des première et seconde périodes. Ces rotations interviennent lors des premières périodes, avant que le mouvement selon (Oy) ne devienne négligeable.

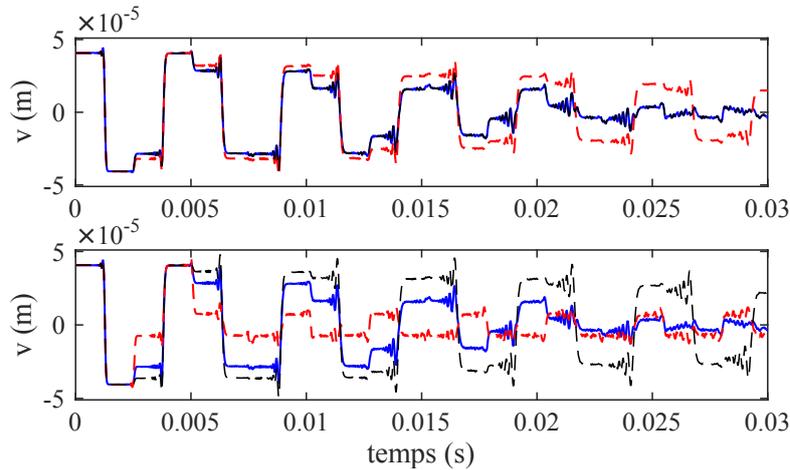


FIGURE 4.15 – Déplacement de la corde selon (Oy) , méthode mixte. En haut : $A = 110 \text{ N.m}^{-1}$, $s = 10^{-8}$ (trait pointillé noir), $s = 10^{-5}$ (trait bleu), $s = 1$ (trait pointillé rouge) m.s^{-1} . En bas : $s = 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$, $A = 40$ (trait pointillé noir), $A = 110$ (trait bleu), $A = 300$ (trait pointillé rouge) N.m^{-1} .

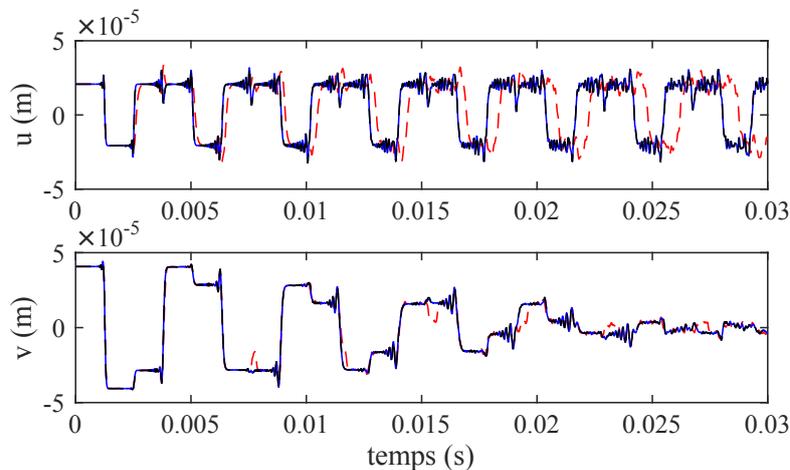


FIGURE 4.16 – Déplacement de la corde selon (Oz) et (Oy) , méthode mixte, $A = 110 \text{ N.m}^{-1}$, $s = 10^{-5}$, $\alpha = 1.5$. $K = 10^9$ (trait pointillé rouge), $K = 10^{13}$ (trait bleu), $K = 10^{15}$ (trait pointillé noir).

Nous présentons enfin des signaux numériques pour différentes valeurs de s , A et K dans les figures 4.15 et 4.16 afin d'en apprécier l'influence. On observe ainsi que la simulation est significativement marquée par une augmentation de s ou une modification de A . Comme mentionné dans la section 3.2.1.5 (page 38), augmenter la raideur du contact n'apporte pas de modification significative, tandis que la diminuer affecte le résultat et l'éloigne de l'expérience.

4.3.3 Obstacle ponctuel centré, méthode non régulière

Nous présentons ici une comparaison des signaux expérimentaux et numériques pour des simulations issues de la méthode non régulière présentée dans la section 3.3.

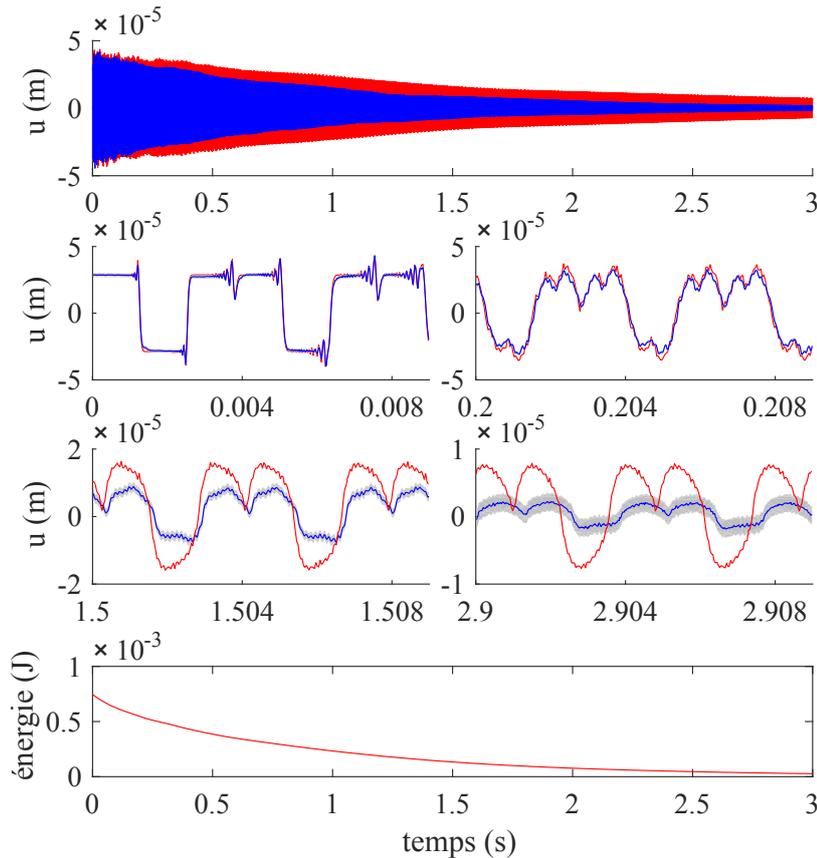


FIGURE 4.17 – Déplacement vertical de la corde vibrante à 1 cm de l'extrémité $x = L$, en présence d'un obstacle ponctuel centré. Comparaison entre la mesure (trait bleu) et la simulation numérique *via* la méthode non régulière, $F_e = 4$ MHz, $\rho = 1$ (trait rouge). Incertitude étendue à 95 % (gris). En bas : décroissance temporelle de l'énergie du signal numérique.

Les signaux temporels sont présentés sur la figure 4.17, pour $\rho = 1$. Les observations sont très semblables à celles effectuées dans la section 4.3.2 : une très forte concordance des signaux peut être relatée, tant localement que globalement, avec néanmoins une erreur notable d'amplitude s'amplifiant au fur et à mesure du signal. On remarque de plus un léger déphasage (16 degrés après 3 s).

Dans le cas d'un obstacle ponctuel, nous avons vu dans la section 3.3.7 que le comportement local de la corde au contact variait en fonction de la valeur du coefficient de restitution ρ . En particulier, de petites oscillations interviennent pour $\rho = 1$, tandis que le contact est parfaitement persistant pour $\rho = 0$ (voir la figure 3.15, page 57). Toutefois, pour l'obstacle étudié ici, la valeur maximale de la variation relative de l'énergie $(H_1^{n+\frac{1}{2}} - H_0^{n+\frac{1}{2}})/H_1^{n+\frac{1}{2}}$ est inférieure à 1 %, et le comportement global n'est pas significativement affecté par le choix de $\rho = 0$ ou $\rho = 1$. Nous ne présentons donc pas le cas $\rho = 0$ dans cette configuration. Pour un autre type d'obstacle, en

particulier un obstacle distribué (typiquement plan), on peut s'attendre à une forte influence du coefficient de restitution.

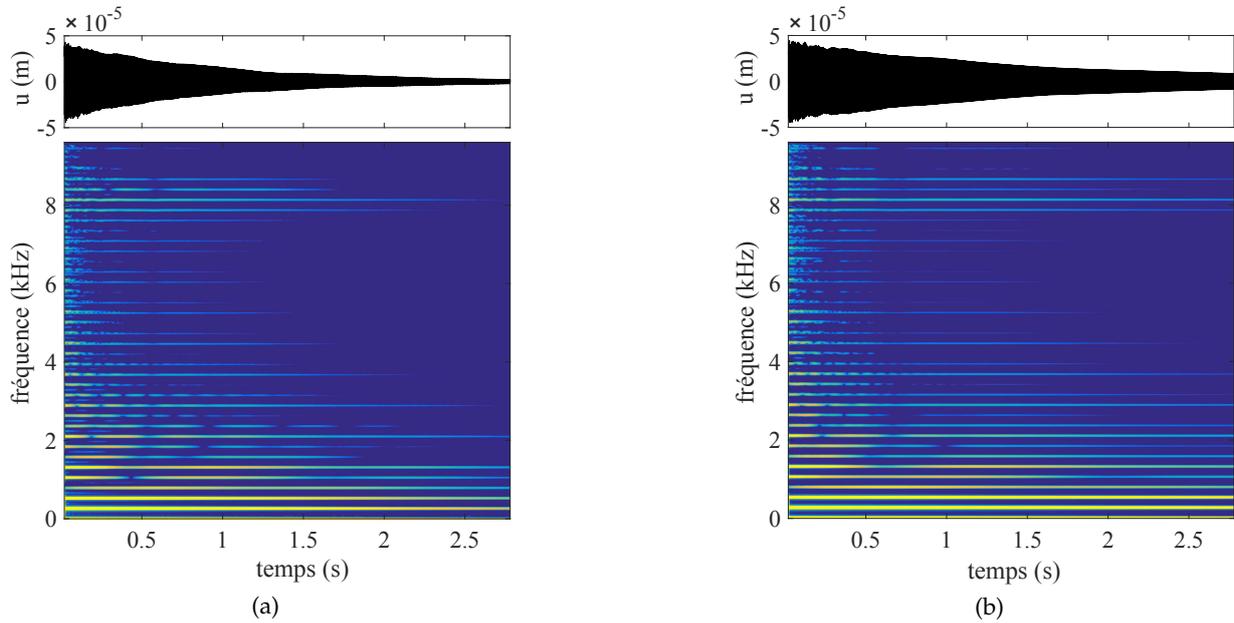


FIGURE 4.18 – Obstacle centré. Spectrogrammes en dB avec une dynamique de 70 dB : (a) expérimental, (b) numérique (méthode non régulière), $F_e = 4$ MHz, $\rho = 1$.

La figure 4.18 présente le spectrogramme du signal expérimental et celui de la simulation obtenue à l'aide de la méthode non régulière. On n'observe pas de différence marquante entre les signaux obtenus par la méthode mixte et par la méthode non régulière, et les observations sont similaires à celles de la section 4.3.2. En particulier, on remarque à nouveau la présence de partiels renforcés à intervalles de fréquence réguliers ainsi qu'une résurgence marquée autour de 8 kHz.

On étudie enfin le mouvement 3D de la corde. La figure 4.19 présente le signal numérique obtenu avec la méthode non régulière pour $\rho = 0$ et le confronte à l'expérience. Pour cette valeur du coefficient de restitution, $\rho = 0$, nous choisissons $A_{NS} = 110 \text{ N.m}^{-1}$, soit la même valeur que pour le schéma mixte. On obtient une différence relative en norme L^2 entre les signaux issus de ces deux méthodes de l'ordre de 10^{-4} sur 0.05 s. Pour $\rho = 1$ en revanche, la valeur $A_{NS} = 220 \text{ N.m}^{-1}$ convient mieux et donne un résultat équivalent, avec une différence relative en norme L^2 de l'ordre de 10^{-4} . Cette différence concernant la valeur de A_{NS} tient au comportement de la corde au point de contact : nous avons vu dans la section 4.3.2.2 que le schéma mixte, pour les paramètres choisis, présentait un contact persistant, bien que cette caractéristique soit affectée au cours de la simulation. La méthode non régulière avec $\rho = 0$ offre une persistance parfaite, tandis que pour $\rho = 1$, le contact observé localement autour de l'obstacle n'est pas persistant (voir la section 3.3.7, figure 3.15). Or la force de frottement n'est appliquée à v que lorsque $u_c < 0$, condition plus souvent respectée pour un contact persistant. La prise en compte d'une loi de frottement impliquant une dépendance à la force selon (Oz) permettrait peut-être de n'avoir qu'une seule et même expression de force pour tout $\rho \in [0, 1]$.

Observons que si les lois de frottement régularisée et non régulière, employées respectivement pour les schémas mixte et non régulier, permettent des résultats similaires dans le cas étudié ici, il existe des configurations pour lesquelles ces deux lois aboutissent à des solutions radicalement différentes. Cela est par exemple mis en exergue dans le cas du pendule dans (THORIN, 2013). En particulier, la loi régularisée ne permet qu'une position d'équilibre, contrairement à la loi non régulière, si bien que dans ce cas cette dernière est plus représentative de la réalité physique du système.

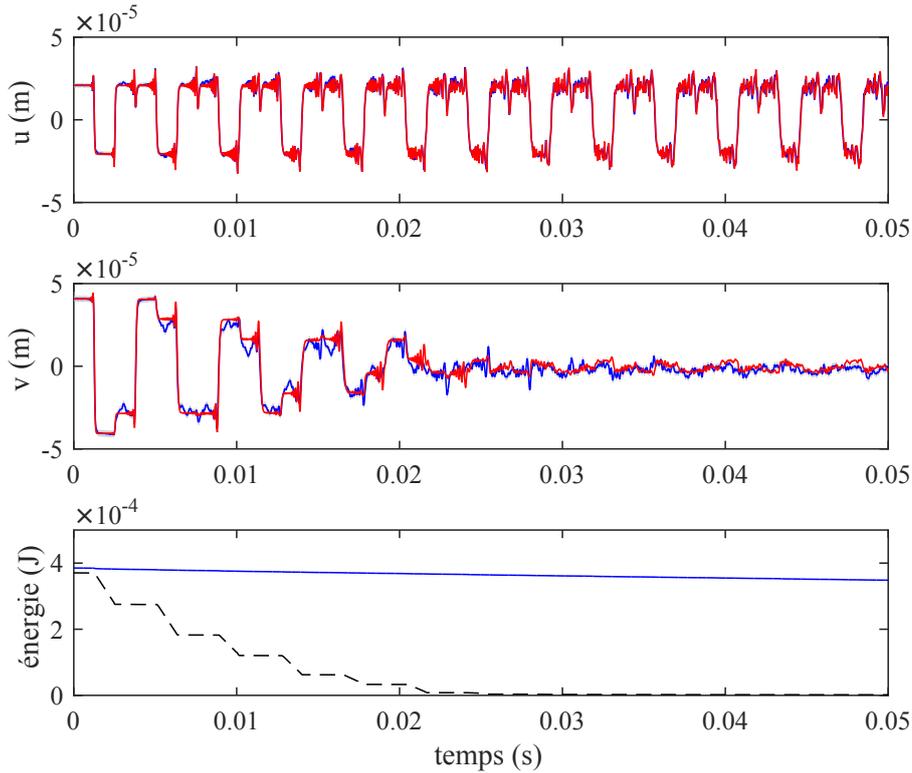


FIGURE 4.19 – En haut et au centre : déplacement de la corde selon (Oz) en $x = L - 10$ mm et (Oy) en $x = L - 20$ mm respectivement, en présence d’un obstacle ponctuel centré, expérimental (trait bleu) et incertitudes avec intervalle de confiance à 95% (gris), et numérique *via* la méthode non régulière, $\rho = 0$, $F_e = 4$ MHz (trait rouge). En bas : énergie des signaux numériques u (trait bleu) et v (trait noir pointillé).

4.3.4 Obstacle ponctuel décentré, méthode mixte

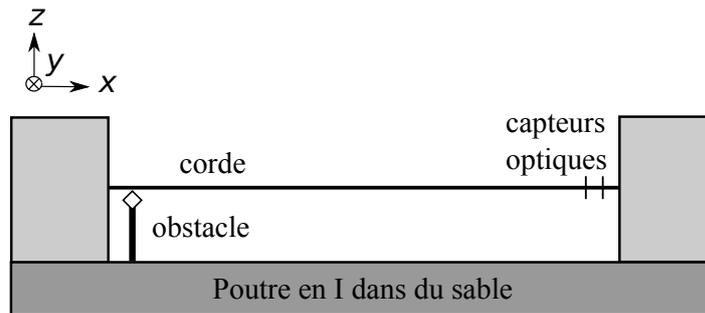


FIGURE 4.20 – Représentation schématique du banc de mesure.

Dans cette section, un obstacle ponctuel proche d’une extrémité et affleurant la corde au repos entrave la vibration de la corde. Cette configuration, représentée sur la figure 4.20, constitue un chevalet double modélisant de manière simplifiée le chevalet d’une tampoira (VALETTE et al., 1993; VALETTE et al., 1991). La distance entre l’obstacle ponctuel et l’extrémité $x = 0$ est prise égale à $x_b = 6$ mm, en accord avec la plage de valeurs données dans (VALETTE et al., 1993) (5 à 7 mm pour une corde de longueur 1 m).

De même que pour l’obstacle ponctuel centré, nous présentons tout d’abord les résultats pour la méthode mixte, puis la méthode non régulière appliquée à la tampoira dans la section 4.3.5.

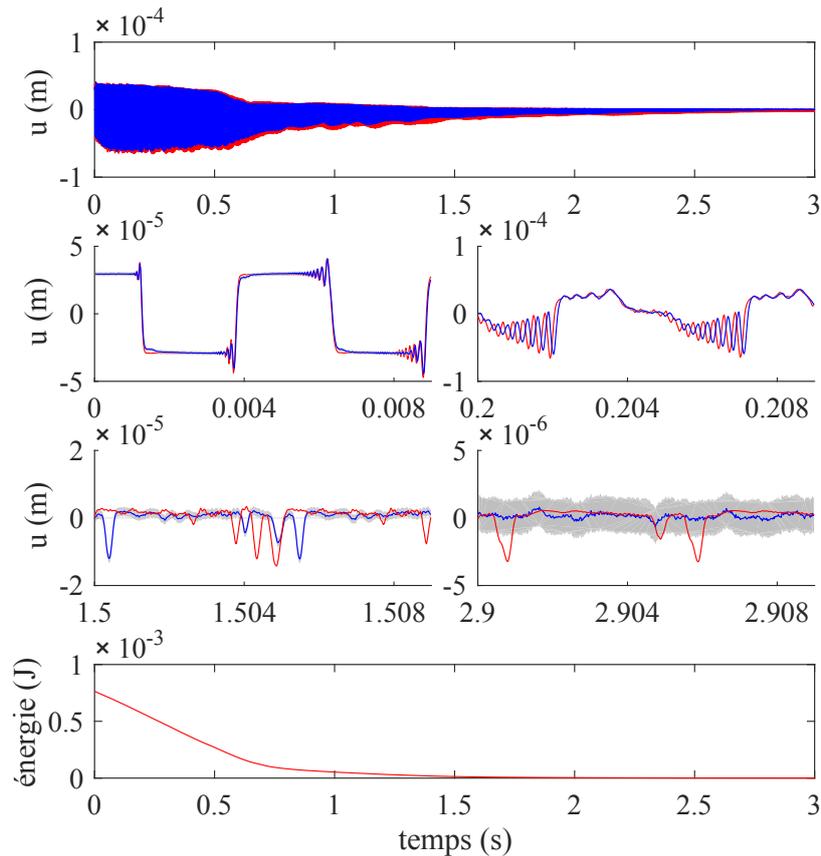


FIGURE 4.21 – Déplacement vertical de la corde vibrante à 1 cm de l’extrémité $x = L$ avec un chevalet double. Comparaison entre la mesure (trait bleu) et la simulation numérique *via* la méthode mixte, $F_e = 2$ MHz (trait rouge). Incertitude étendue à 95 % (gris). En bas : décroissance temporelle de l’énergie du signal numérique.

La figure 4.21 montre le signal expérimental et la simulation numérique dans le cas d’un chevalet double. De même que dans les configurations étudiées précédemment, la forme globale ainsi que le détail des oscillations sont reproduits avec précision par le schéma numérique. L’effet de la dispersion est fidèlement décrit, comme on peut le voir sur les zooms, autour de 0 et 0.2 s en particulier. Une légère erreur d’amplitude apparaît, moindre que dans le cas d’un obstacle centré, ainsi qu’un léger déphasage (20 degrés après 1.5 s). Les raisons possibles sont évoquées dans le cas précédent (voir la section 4.3.2). Par ailleurs, l’énergie totale décroît plus rapidement que dans le cas d’un obstacle ponctuel centré, pour lequel l’énergie diminue elle-même plus vite que dans le cas sans obstacle. Cela peut être dû à un transfert plus important de l’énergie vers les hautes fréquences dans le cas du chevalet double, fréquences pour lesquelles l’amortissement est plus élevé.

Nous nous concentrons à présent sur les spectrogrammes (figure 4.22). De même que dans le cas d’un obstacle centré, il n’y a pas de réjection de modes car ceux-ci sont couplés à travers l’obstacle. Un formant descendant est présent, il suit une évolution temporelle semblable à celles décrites dans (VALETTE et al., 1993) (étude expérimentale) et (VAN WALSTIJN et al., 2014) (étude numérique), où une corde vibrant contre un obstacle représentant un chevalet de tamboura est considérée. Cette évolution est reproduite avec précision par le schéma numérique, malgré certaines différences apparaissant après 2 s, lorsque l’amplitude du signal devient faible. Le rôle essentiel de la dispersion de la corde, mis en évidence dans (VALETTE et al., 1993; SIDDIQ, 2012), est à nouveau démontré ici à l’aide du spectrogramme de la figure 4.23, pour lequel il n’y a pas de dispersion. En comparant les figures 4.22(b) et 4.23, on observe un comportement ascendant similaire au niveau des basses fréquences, au début du signal. Cependant les spectrogrammes

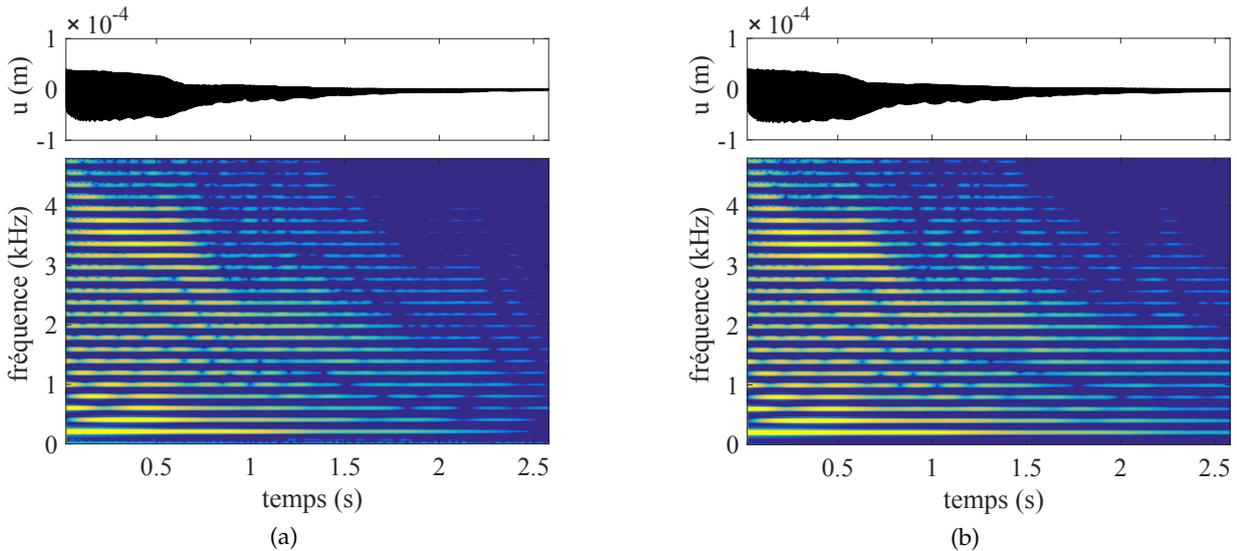


FIGURE 4.22 – Chevalet double. Spectrogrammes en dB avec une dynamique de 70 dB : (a) expérimental, (b) numérique (méthode mixte), $F_e = 2$ MHz.

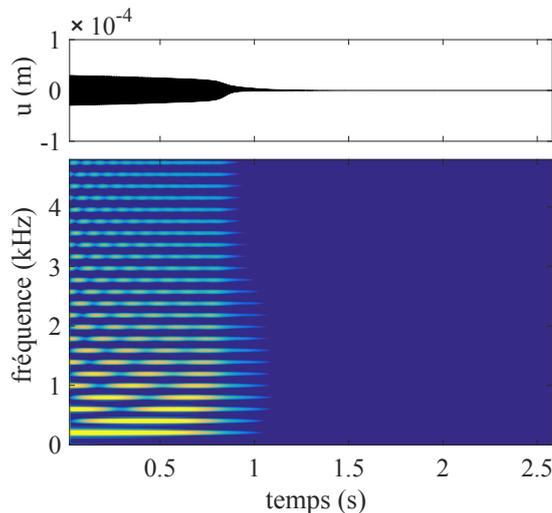


FIGURE 4.23 – Chevalet double. Spectrogramme du signal numérique sans dispersion, obtenu avec la méthode mixte.

diffèrent considérablement pour les temps et fréquences supérieures. Cela montre l'importance de la dispersion dans le comportement riche et complexe du signal.

4.3.5 Obstacle ponctuel décentré, méthode non régulière

Les figures 4.24 et 4.25 présentent les résultats expérimentaux et numériques, les simulations étant conduites avec la méthode non régulière. La correspondance est à nouveau très forte, de même que pour la méthode mixte. On observe un léger déphasage du même ordre, et le spectrogramme de la simulation fait clairement apparaître les renforcements spectraux précédemment évoqués. De même que pour le cas d'un obstacle centré, une variation de $\varrho \in [0, 1]$ ne modifie pas significativement la simulation. Enfin, les simulations obtenues avec les méthodes mixte et non régulière sont extrêmement proches, avec un arrondissement légèrement plus marqué de la forme d'onde à la fin du signal pour la méthode non régulière.

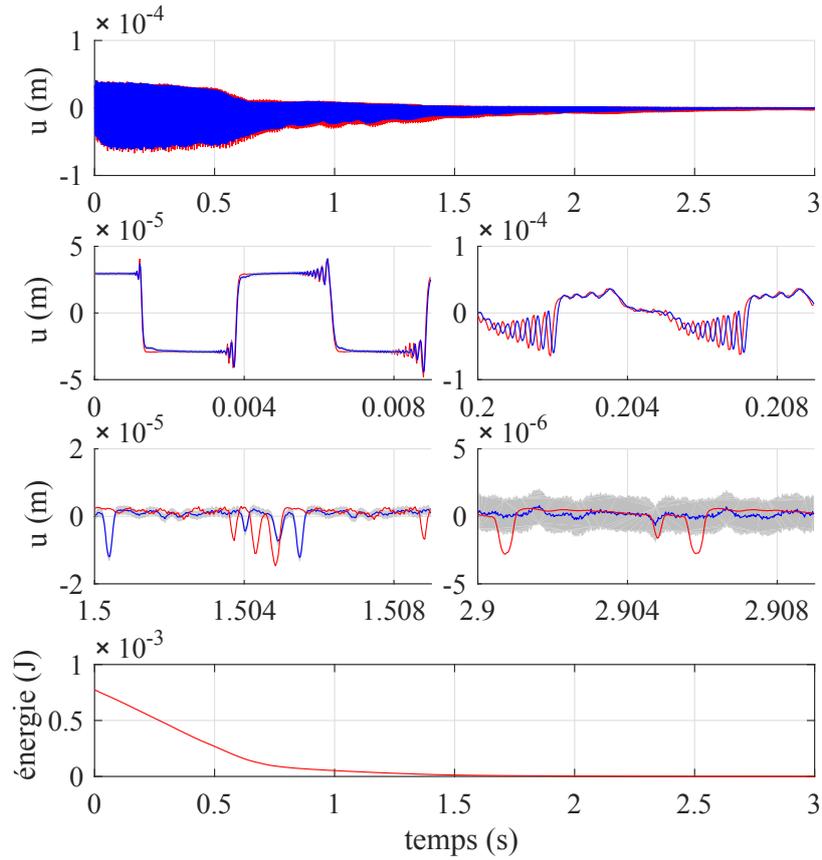


FIGURE 4.24 – Déplacement vertical de la corde vibrante à 1 cm de l’extrémité $x = L$ avec un chevalet double. Comparaison entre la mesure (trait bleu) et la simulation numérique *via* la méthode non régulière, $F_e = 4$ MHz, $\rho = 1$ (trait rouge). Incertitude étendue à 95 % (gris). En bas : décroissance temporelle de l’énergie du signal numérique.

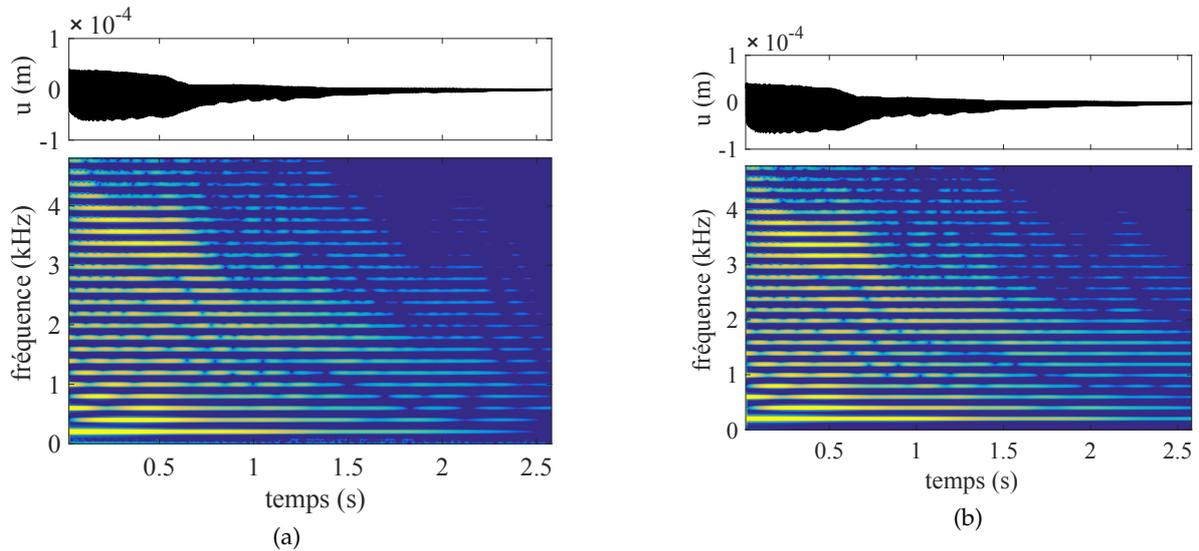


FIGURE 4.25 – Chevalet double. Spectrogrammes en dB avec une dynamique de 70 dB : (a) expérimental, (b) numérique (méthode non régulière), $F_e = 4$ MHz, $\rho = 1$.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un protocole expérimental permettant l'étude de la vibration d'une corde isolée a été mis en place. Il a permis, dans le cas de déplacements de faible amplitude, de mettre en évidence la fidélité des modèles numériques aux résultats expérimentaux sur des temps longs. De plus, des comportements complexes de la corde, s'exprimant par des échanges d'énergie et une richesse spectrale accrue, ont pu être observés. Dans le cas d'un chevalet double, cela se traduit par la formation de formants descendants caractéristiques de la tampoura. Nous n'avons pas constaté de différence majeure entre les modèles mixte et non régulier sinon concernant une valeur de paramètre dans le modèle de frottement ; tous deux reproduisent avec précision le comportement physique de la corde.

Nous proposons à présent d'étendre l'étude menée dans ce chapitre au cas d'un obstacle distribué. La méthode non régulière ayant été abordée à la fin du doctorat, elle n'a été mise en place que pour un obstacle ponctuel et n'est donc pas employée par la suite. La prise en compte d'un obstacle distribué avec cette méthode nécessite la résolution d'un LCP plus complexe.

Dans la suite de ce manuscrit, nous employons donc la méthode mixte pour étudier le comportement d'une corde vibrante en présence d'un obstacle distribué. Cette étude est appliquée à la basse électrique, ce qui nécessite notamment la prise en compte d'un couplage de la corde avec la structure de l'instrument.

Chapitre 5

Contact distribué : application à la basse électrique¹

La basse électrique à corps plein (*solid-body* en anglais) a une histoire récente s'exprimant depuis la première moitié du 20^{ème} siècle. Créée pour augmenter le volume sonore et améliorer la précision de jeu par rapport à la contrebasse, la basse électrique s'inspire du fonctionnement de la guitare électrique et comporte quatre cordes accordées comme la contrebasse (mi-la-ré-sol, de la plus grave à la plus aigüe) (BACON). Le son de cet instrument est le fruit d'une chaîne électro-acoustique amorcée lors du mouvement vibratoire de la corde. Parmi les techniques de jeu adoptées par les musiciens, certaines reposent sur un aspect percussif du son, impliquant un contact entre les cordes vibrantes et le manche, muni ou non de frettes (dans ce dernier cas, on parle de guitare *fretless*). Deux modes de jeu typiques sont le « pop », pour lequel la corde est pincée suffisamment fort pour provoquer des contacts, et le « slap », pour lequel la corde est frappée avec le pouce, ce qui résulte également en un contact corde/manche (GROVE). Ce contact introduit, comme nous allons le voir, de fortes non-linéarités dans le signal et produit un son propre aux attaques adoptées.

La méthode mixte présentée dans la section 3.2.1 est ici appliquée à la basse électrique lorsqu'elle est jouée en pop, heurtant ainsi un obstacle distribué spatialement. L'objectif d'un tel outil numérique est de faire progresser la compréhension du comportement de la corde lorsqu'elle entre en contact avec les frettes ou le manche, à travers l'étude de paramètres clefs. Un protocole expérimental contrôlé pour l'étude de la basse électrique est proposé dans la section 5.1, puis les caractéristiques linéaires de la corde sur chacune des basses sont données dans la section 5.2. Celles-ci sont ensuite injectées dans le modèle mixte. Les signaux numériques et expérimentaux sont confrontés dans la section 5.3 pour une basse frettée, puis une étude paramétrique numérique est menée dans la section 5.4 afin de mettre en exergue l'influence de certains paramètres sur le son obtenu, ces paramètres pouvant être reliés à des problématiques de jeu ou de facture instrumentale. Le cas de la basse *fretless* est présenté dans la section 5.5. Une conclusion est enfin proposée dans la section 5.6. Une partie de cette étude a fait l'objet d'un acte de congrès (ISSANCHOU et al., 2017b) et d'un article soumis à la revue *Applied Acoustics* (ISSANCHOU et al., 2018).

5.1 Protocole expérimental

Nous considérons une corde de sol d'une basse électrique de marque D'Addario, constituée d'une âme et d'un filet rond métalliques. Ses propriétés sont spécifiées dans le tableau 5.1, la tension étant déduite des autres paramètres. Sa fréquence fondamentale est de 98 Hz. La corde est successivement installée sur deux basses électriques, l'une avec et l'autre sans frettes, les instruments étant eux-mêmes installés sur des élastiques afin de simuler des conditions aux limites libres. Seule la corde à vide, *i.e.* sans doigté, est étudiée ici. Les deux basses sont des *Fender*

1. Les sons associés aux signaux présentés sont disponibles sur : <http://www.lam.jussieu.fr/Membres/Issanchou/PhD.html>. Ils correspondent au déplacement de la corde rééchantillonné à 44.1 kHz.

Jazz Basses, un modèle phare de Fender (SÉGURET, 2015). Elles ont des numéros de série proches et sont produites avec les mêmes types de matériaux (voir la figure 5.1).



(a)



(b)

FIGURE 5.1 – Basses électriques (a) munie de frettes (b) *fretless*.

L (m)	d (mm)	d_{core} (mm)	T (N)	μ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$)
0.863	1.14	0.43	191.6	6.69×10^{-3}

TABLE 5.1 – Propriétés de la corde de basse électrique.

La mobilité au sillet est obtenue en y appliquant une impulsion et en mesurant l'accélération localisée. Pour cela, un marteau d'impact Brüel & Kjær 8203 et un accéléromètre PCB Piezotronics 352B10 sont utilisés (voir la figure 5.2).

Le déplacement de la corde est obtenu à l'aide des capteurs optiques mis à profit dans le chapitre 4 et calibrés d'après la procédure décrite dans (LE CARROU et al., 2014), le diamètre de la corde ne donnant pas lieu ici à la difficulté rencontrée dans la section 4.1.2. Les déplacements selon (Oz) et (Oy) sont enregistrés simultanément avec des capteurs placés respectivement à 9 et 18 mm du chevalet, et le profil des frettes est mesuré à l'aide d'un réglet. Nous approchons les positions des frettes mesurées par des positions coïncidant avec la grille discrète, choisie fine ($\Delta x = 1$ mm). La condition initiale est obtenue en tirant la corde à une position donnée avec un fil de cuivre jusqu'à rupture de ce dernier (voir la section 4.1.3). Différents diamètres de fil de cuivre (0.05, 0.1 et 0.15 mm) permettent d'appliquer des conditions initiales d'amplitudes croissantes. Afin d'éviter des vibrations par sympathie (LE CARROU et al., 2005), les autres cordes sont étouffées à l'aide de papier absorbant (voir la figure 5.2).

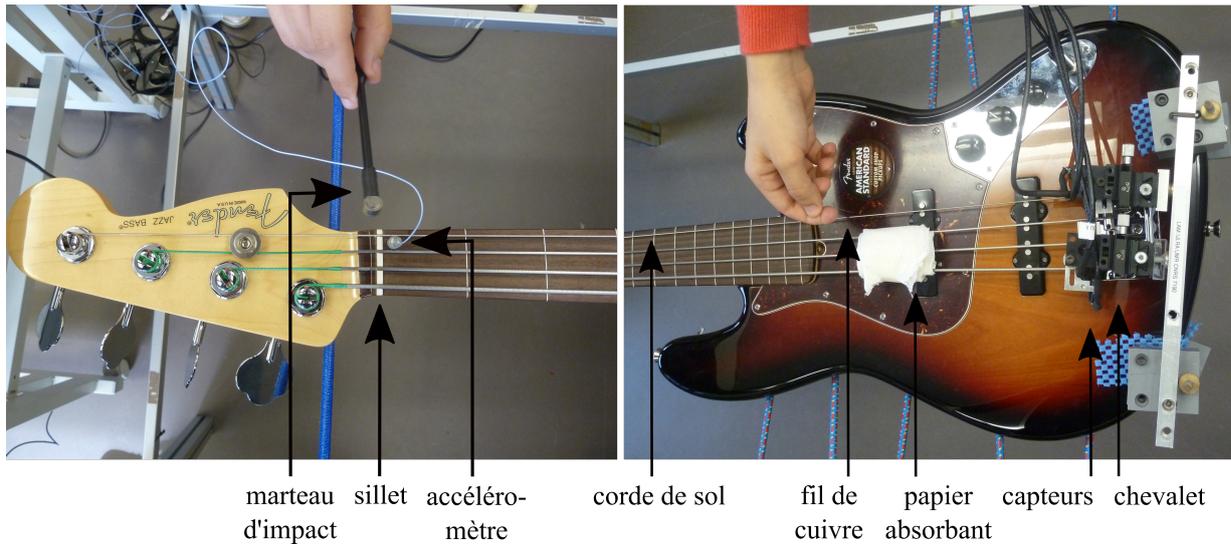


FIGURE 5.2 – Protocole expérimental.

5.2 Identification des caractéristiques linéaires

Afin d'identifier les caractéristiques linéaires de la corde couplée à l'instrument, celle-ci est pincée à l'aide d'un fil de diamètre 0.05 mm à une position proche du sillet, de manière à exciter un grand nombre de modes sans provoquer de contact. La démarche employée par la suite est identique à celle décrite dans la section 4.2 pour la corde isolée.

Les résultats sont reportés sur les figures 5.3 et 5.4, pour chacune des basses étudiées. Les incertitudes sont calculées sur cinq à dix mesures, elles sont la plupart du temps trop faibles pour être visibles. Les modèles présentés dans les sections 2.1.2.4 et 2.1.2.5 y sont également reportés, avec les paramètres spécifiés dans le tableau 5.2, choisis par rapport à l'expérience. Nous avons choisi deux valeurs proches mais distinctes de δ_{ve} pour chacune des basses. Cela peut être dû au fait que la corde a été détendue avant d'être installée sur la seconde basse, ce qui a pu légèrement modifier ses propriétés. La mobilité au sillet de chacune des basses, dont la partie réelle (la conductance) est présentée sur les figures 5.3(c) et 5.4(c), est incluse dans les modèles jusqu'à environ 10000 Hz. La cohérence γ_{af}^2 est montrée sur la figure 5.5 pour les deux basses, elle est calculée sur 10 mesures de la mobilité au sillet selon l'équation suivante :

$$\gamma_{af}^2 = \frac{|S_{af}(\omega)|^2}{S_a(\omega)S_f(\omega)}, \quad (5.1)$$

où S_{af} est l'interspectre, et S_f, S_a sont les autospectres d'entrée et de sortie (force et accélération). Les valeurs sont proches de 1 dans le domaine fréquentiel d'utilisation, ce qui confirme la validité des mesures.

Les mobilités des deux basses présentent des différences malgré la similarité de ces deux instruments ; cela peut être lié à la variabilité des matériaux et des diverses étapes de production (PATÉ, 2014). À titre de comparaison, la conductance au chevalet est également présentée dans le cas de la basse munie de frettes. On observe qu'elle est négligeable dans le domaine fréquentiel de la corde étudiée. La courbe représentant le modèle d'amortissement sans mobilité permet d'apprécier l'influence du terme de mobilité sur les pertes, qui peut être mise en regard des valeurs de conductance correspondantes. Cette influence est forte en basses fréquences puis décroît pour les fréquences plus élevées, jusqu'à devenir négligeable au-delà d'environ 30 modes.

B	δ_{ve}	Q_{te}^{-1}	α	K	N
3.5×10^{-5}	basse frettée : 0.01 ; <i>fretless</i> : 0.014	6×10^{-6}	1.5	10^{13}	863

TABLE 5.2 – Paramètres du modèle pour les basses électriques.

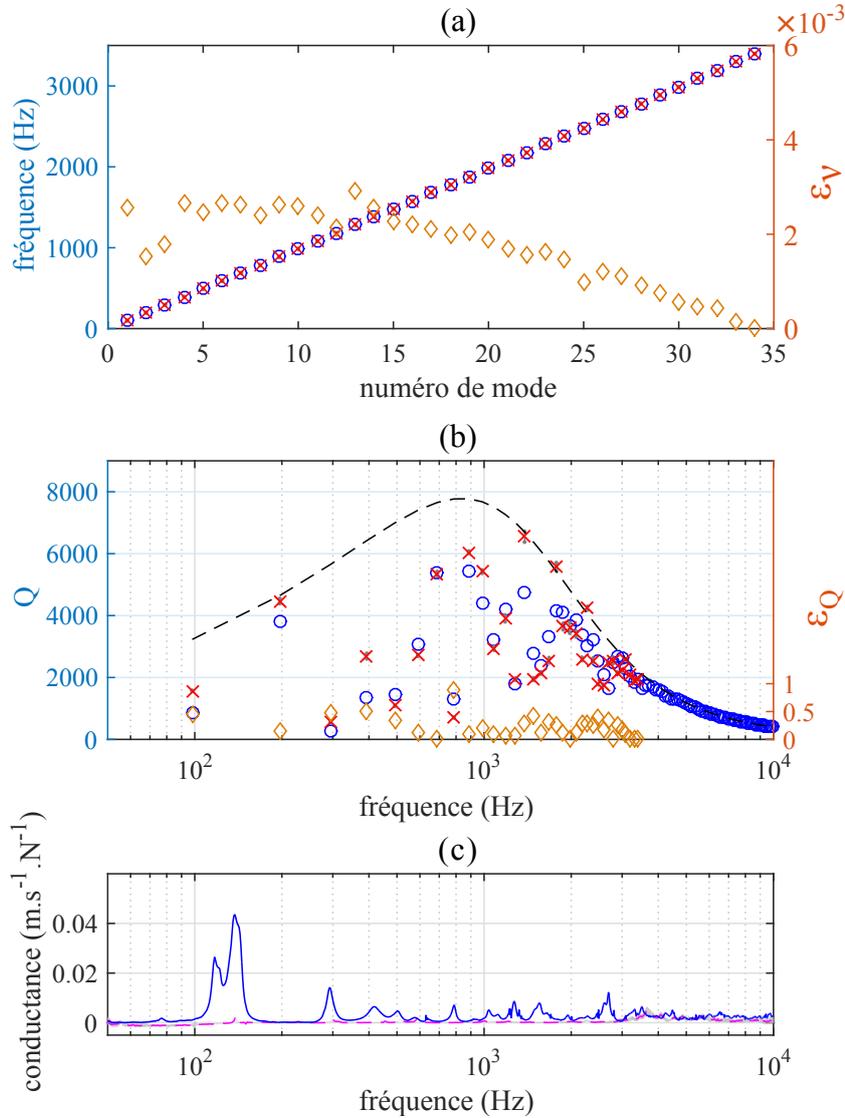


FIGURE 5.3 – Basse munie de frettes. (a) Fréquences propres expérimentales ν_m (croix rouges) et théoriques ν_{th} (cercles bleus), incertitude étendue à 95 % (traits gris) et erreur relative (losanges oranges) $\epsilon_\nu = \frac{|\nu_{th} - \nu_m|}{\nu_m}$. (b) Facteurs de qualité expérimentaux Q_m (croix rouges), théoriques Q_{th} (cercles bleus) et théoriques sans mobilité (trait pointillé noir), incertitude étendue à 95 % (traits gris) et erreur relative $\epsilon_Q = \frac{|Q_{th} - Q_m|}{Q_m}$ (losanges oranges) (c) Conductance au silet (trait bleu), au chevalet (trait pointillé magenta) et incertitudes étendues à 95 % (gris).

Afin de prendre en compte les paramètres d'entrée du modèle mixte les plus précis possibles, les valeurs mesurées des caractéristiques linéaires sont directement incluses jusqu'au 34^{ème} mode (35^{ème} pour la basse *fretless*), *i.e.* jusqu'à environ 3400 Hz (respectivement 3500 Hz). Pour les fréquences supérieures, les modèles théoriques mentionnés précédemment sont utilisés. Pour cette raison, les paramètres de ces modèles sont choisis de manière à correspondre au mieux aux mesures en hautes fréquences tout particulièrement.

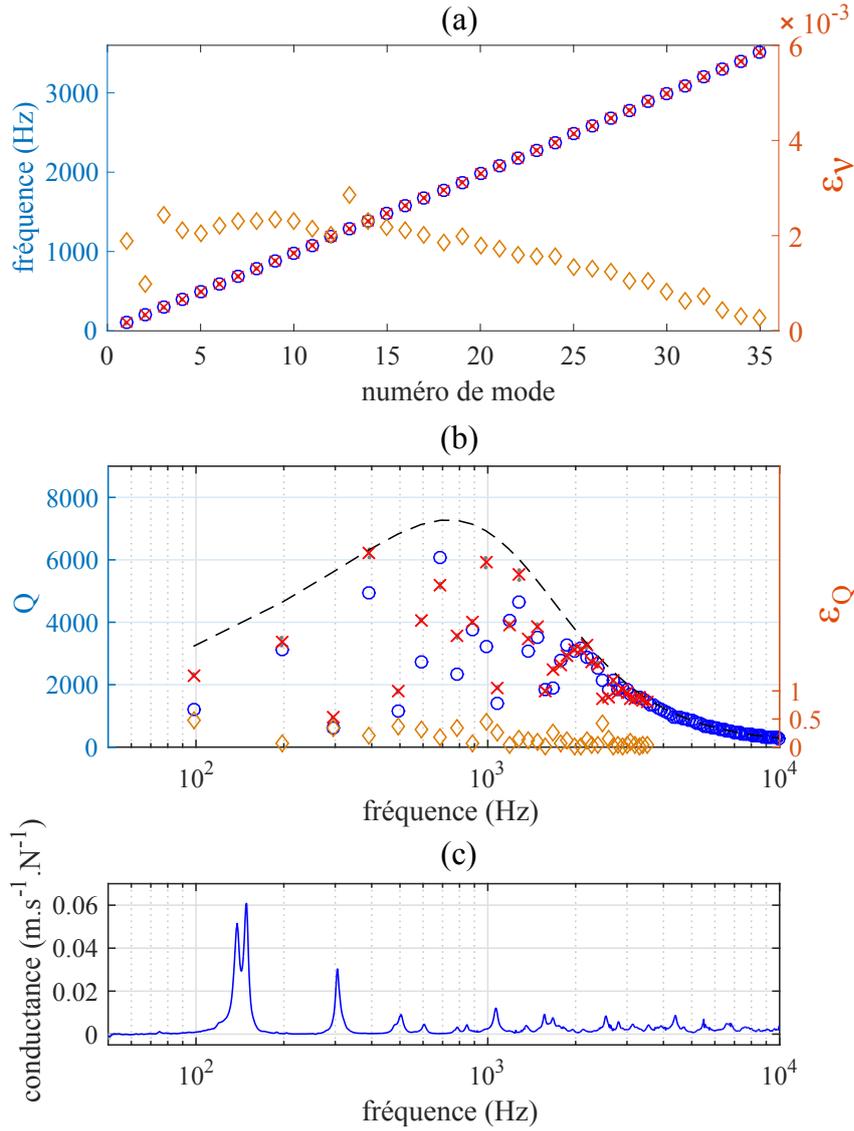


FIGURE 5.4 – Basse *fretless*. (a) Fréquences propres expérimentales ν_m (croix rouges) et théoriques ν_{th} (cercles bleus), incertitude étendue à 95 % (traits gris) et erreur relative (losanges oranges) $\epsilon_\nu = \frac{|\nu_{th} - \nu_m|}{\nu_m}$. (b) Facteurs de qualité expérimentaux Q_m (croix rouges), théoriques Q_{th} (cercles bleus) et théoriques sans mobilité (trait pointillé noir), incertitude étendue à 95 % (traits gris) et erreur relative $\epsilon_Q = \frac{|Q_{th} - Q_m|}{Q_m}$ (losanges oranges) (c) Conductance au sillet (trait bleu) et incertitude étendue à 95 % (gris).

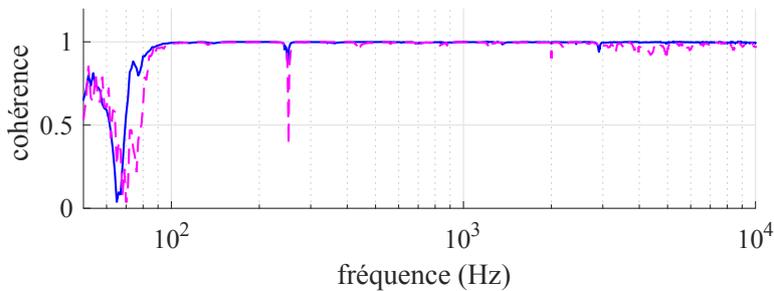


FIGURE 5.5 – Cohérence calculée sur 10 mesures de mobilité au sillet, pour les basses munie de frettes (trait bleu) et *fretless* (trait pointillé magenta).

5.3 Comparaison des simulations numériques et mesures sur la basse munie de frettes

Dans cette section, les résultats numériques et expérimentaux sont confrontés dans des configurations impliquant éventuellement des contacts. Les simulations numériques sont menées avec les paramètres précisés dans le tableau 5.2. La fréquence d'échantillonnage F_e dépend du cas considéré et du nombre de contacts impliqués. Le critère de convergence choisi correspond à une erreur relative du signal évalué au point de mesure inférieure à 0.1, sur une durée de simulation couvrant au moins l'ensemble des instants de contact. Ce critère strict, appliqué également dans le chapitre 4, conduit à des valeurs de fréquences d'échantillonnage élevées pour garantir la fiabilité des simulations.

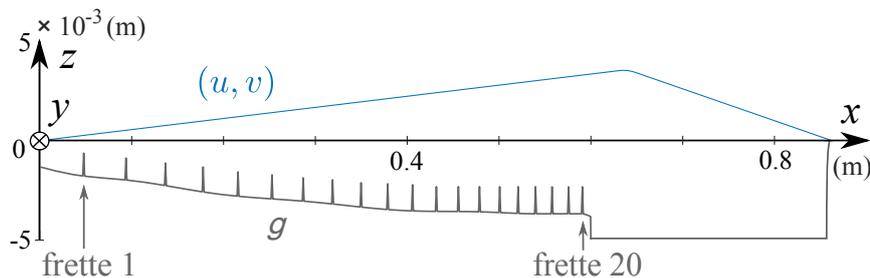


FIGURE 5.6 – Une corde de longueur L vibrant contre un manche de guitare basse électrique munie de frettes représenté par la fonction g .

Trois cas mettant en jeu une excitation selon (Oz) uniquement sont considérés (voir la figure 5.6). Le premier concerne un déplacement initial maximal suffisamment petit (0.87 mm) pour qu'aucun contact n'intervienne. Ce cas, noté A, permet de valider la procédure d'identification des paramètres linéaires. Deux autres cas, notés B et C, impliquent des contacts entre la corde et un grand nombre de frettes. Celui-ci dépend du déplacement initial qui est respectivement de 3.6 mm et 7.8 mm. Ces ordres de grandeur correspondent à ceux relevés sur des musiciens pour un jeu en pop.

La figure 5.7 montre les signaux temporels pour les trois cas considérés. En l'absence de contact, les résultats expérimentaux et numériques coïncident quasiment parfaitement, aussi bien au niveau global que dans le détail de la forme d'onde. Le signal prend ainsi une allure en créneaux lors des premiers instants, sur lesquels des oscillations haute fréquence apparaissent du fait de la dispersion. Peu à peu, à cause des effets conjugués de la dispersion et des amortissements, cette forme en créneaux est modifiée. Cette forte correspondance entre expérience et simulation conduit à des distributions fréquentielles et des sons extrêmement semblables. Elle met en avant la qualité de la procédure d'identification ainsi que la capacité d'adaptation de la méthode numérique. Nous proposons à présent une discussion plus détaillée pour les cas B et C.

5.3.1 Cas B : vibration avec contact sur 12 frettes

Le cas B correspond à un déplacement initial maximal de 3.6 mm et donne lieu à de nombreux contacts pendant la vibration, si bien que des effets non linéaires sont à présent impliqués. La comparaison globale montrée dans la figure 5.7(b) est très satisfaisante. De même que dans le cas A, une forme en créneaux peut être observée sur les premiers instants; néanmoins celle-ci est le siège de beaucoup plus de hautes fréquences qu'en l'absence de contact. De plus, la période du signal sur les premiers instants semble plus courte, ce que l'on n'observe plus à la fin du signal. Cela suggère une augmentation de la fréquence fondamentale au début du signal; nous reviendrons sur cette observation. Une analyse temps-fréquence est présentée dans la figure 5.8(a-b) à l'aide de spectrogrammes, révélant des effets intéressants et des similarités notables. Un effet

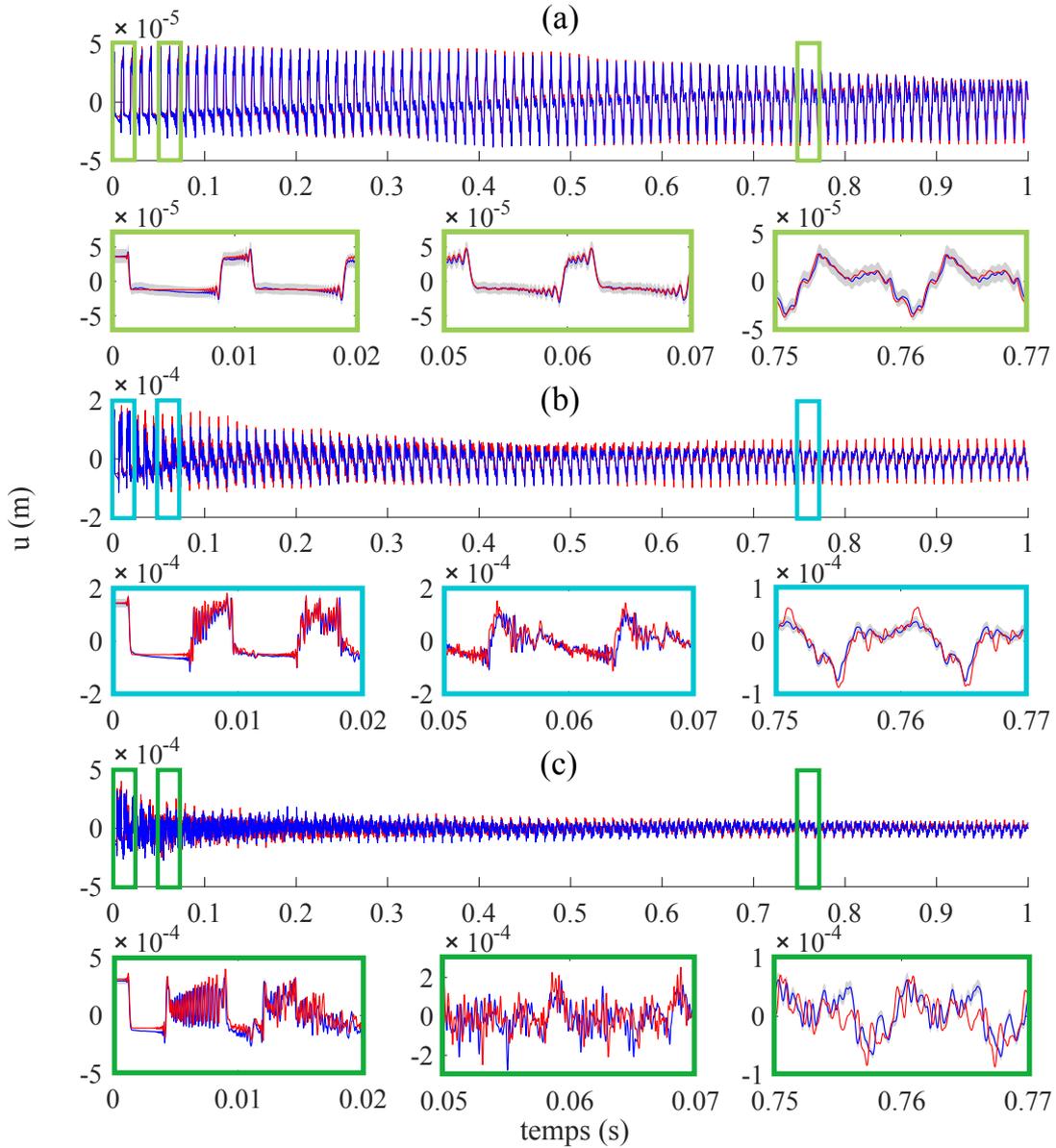


FIGURE 5.7 – Déplacement de la corde : signaux sur 1 s et zooms. Comparaison entre les mesures (trait bleu) et les simulations numériques issues de la méthode mixte (trait rouge), la variable observée est le déplacement selon (Oz) à 9 mm de l'extrémité $x = L$. Incertitude étendue à 95 % (gris). (a) Cas A : sans contact, $u_{0,max} = 0.87$ mm, $F_e = 51200$ Hz. (b) Cas B : avec contact, $u_{0,max} = 3.6$ mm, $F_e = 8$ MHz. (c) Cas C : avec contact, $u_{0,max} = 7.8$ mm, $F_e = 16$ MHz.

des plus évidents correspond aux transferts d'énergie complexes lors du transitoire d'attaque, lorsque des contacts ont lieu. Ce phénomène dure environ 0.09 s pendant lesquelles une grande quantité d'énergie est transmise des fréquences les plus basses aux plus élevées. Il est correctement reproduit par la simulation numérique, bien que la durée correspondante semble légèrement plus élevée dans le cas expérimental. Par ailleurs, certaines zones spectrales renforcées peuvent clairement être identifiées, par exemple autour de 4500 Hz, expérimentalement et numériquement.

Afin de quantifier ce transfert d'énergie, nous introduisons la fréquence caractéristique ν_c suivante, d'autant plus élevée que le contenu spectral est riche en hautes fréquences :

$$\nu_c = \frac{\int_{\nu=0}^{F_e/2} a(\nu)^2 \nu d\nu}{\int_{\nu=0}^{F_e/2} a(\nu)^2 d\nu}, \quad (5.2)$$

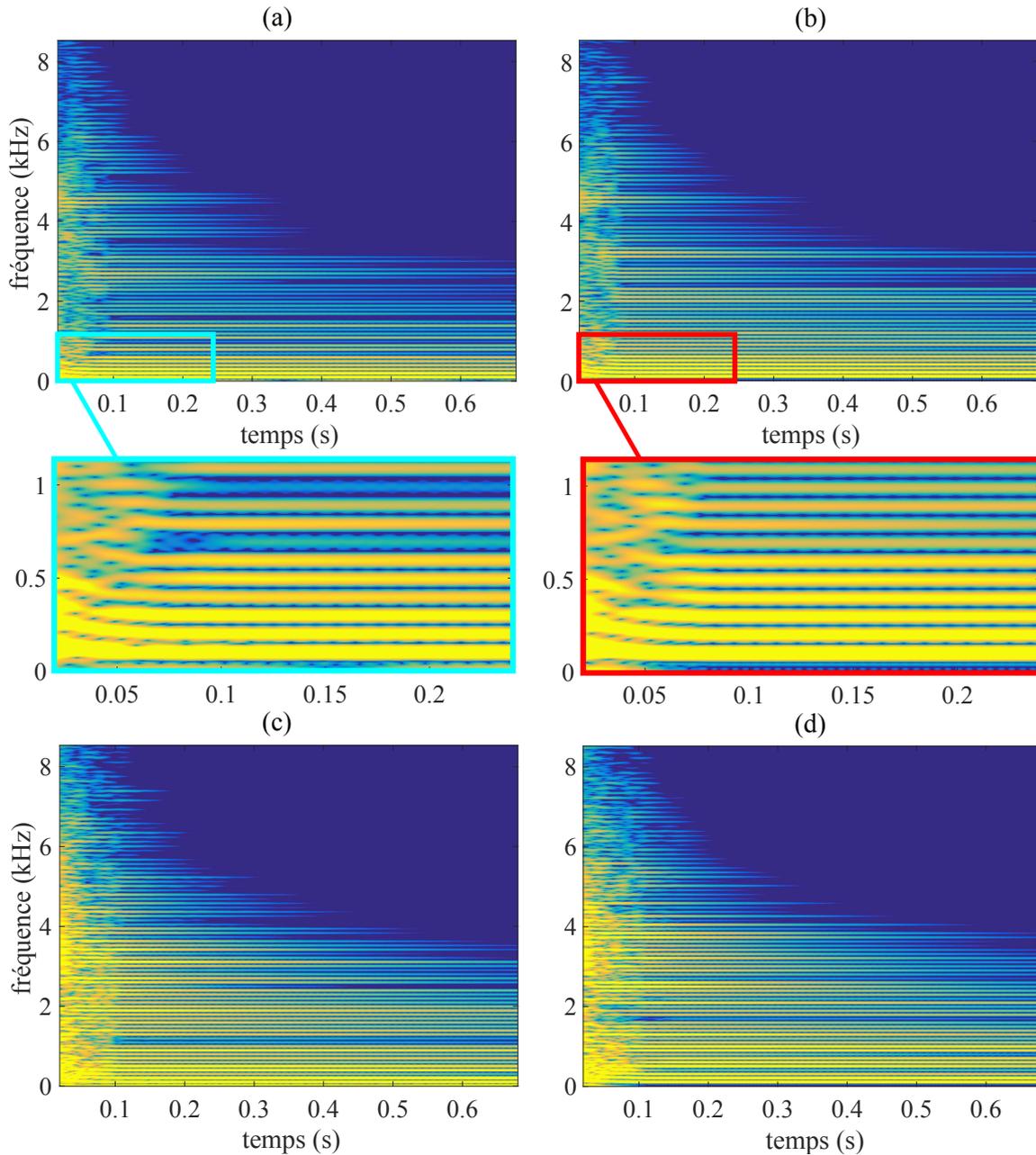


FIGURE 5.8 – Spectrogrammes du déplacement dans le cas de contacts corde/frettes, en dB avec une dynamique de 70 dB. (a) Expérimental, avec zoom, $u_{0,max} = 3.6$ mm (b) numérique, avec zoom, $u_{0,max} = 3.6$ mm, $F_e = 8$ MHz (c) expérimental, $u_{0,max} = 7.8$ mm (d) numérique, $u_{0,max} = 7.8$ mm, $F_e = 16$ MHz.

où $a(\nu)$ est l'amplitude de Fourier évaluée à la fréquence ν , pour le signal rééchantillonné à $F_e = 51200$ Hz.

Cette fréquence caractéristique est par exemple utilisée dans le traitement des signaux de turbulence afin de caractériser l'échelle spectrale de la cascade d'énergie. Dans un contexte vibratoire, elle a été en particulier utilisée récemment pour quantifier l'évolution de la cascade d'énergie vers les hautes fréquences en fonction de la puissance injectée dans le cas d'une turbulence d'ondes pour une plaque mince (DUCCESCHI et al., 2014).

La figure 5.9 montre le comportement de ν_c dans les cas A, B et C. Dans le cas A, ν_c décroît légèrement dans le temps à cause des coefficients d'amortissement plus élevés dans les hautes fréquences. Pour le cas B, l'enrichissement spectral des premiers instants est clairement visible.

On peut observer des évolutions de ν_c similaires entre l'expérience et les simulations. L'erreur relative entre le signal expérimental et la simulation de fréquences caractéristiques $\nu_{c,m}$ et $\nu_{c,n}$ respectivement, donnée par $\frac{\nu_{c,n}-\nu_{c,m}}{\nu_{c,m}}$, est inférieure à 0.2 sur toute la durée du signal dans le cas B.

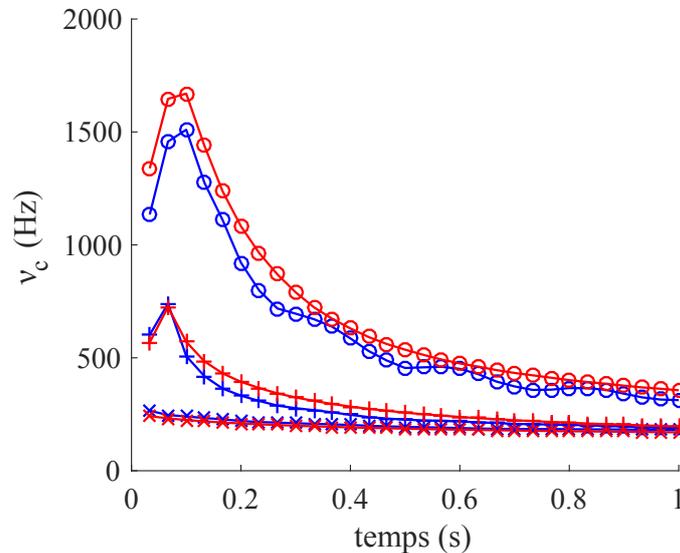


FIGURE 5.9 – Fréquences caractéristiques du signal expérimental (bleu) et de la simulation numérique (rouge) pour des déplacements initiaux maximaux croissants. Cas A (traits et croix), B (traits et signes plus) et C (traits et cercles).

Les transferts d'énergie vers les hautes fréquences engendrent des pertes d'énergie soudaines, illustrées sur la figure 5.10. En effet, les hautes fréquences sont davantage amorties que les basses fréquences, si bien que l'énergie qui leur est transmise est dissipée plus rapidement, et met à nouveau en évidence les fortes non-linéarités en jeu.

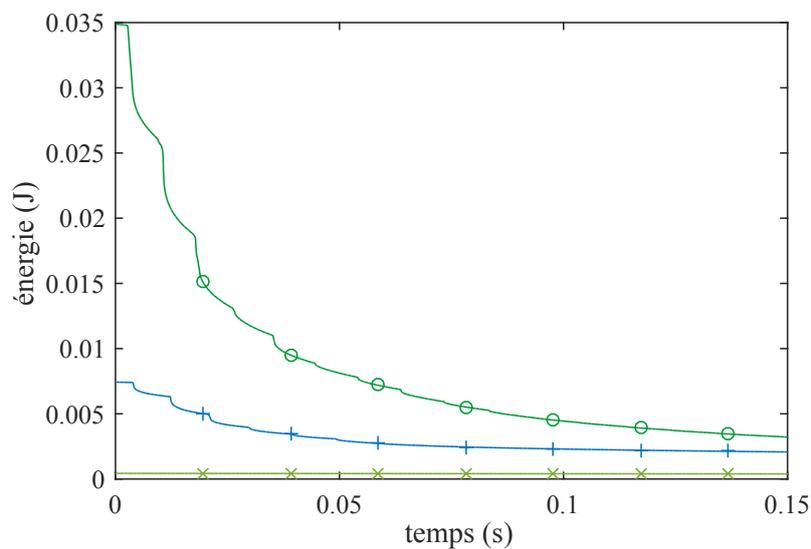


FIGURE 5.10 – Énergie du signal numérique dans les cas A (trait et croix verts clairs), B (trait et signes plus bleus) et C (trait et cercles verts sombres).

Un autre aspect intéressant révélé par les spectrogrammes montrés sur la figure 5.8 est un glissement de fréquence dans le domaine des basses fréquences (principalement en-dessous de 500 Hz, voir les zooms de la figure 5.8(a-b)), qui est fidèlement reproduit numériquement. Cela vient appuyer l'observation faite précédemment sur les signaux temporels. Ce phénomène de

glissement de fréquence, dû à la présence de l'obstacle, a déjà été observé dans le cas d'un obstacle courbe à l'une des extrémités d'une corde dans (KARTOFELEV et al., 2015). Dans le cas présent, il est intimement lié à l'occurrence des contacts dans le temps et l'espace. Pour mettre ce lien en évidence, un « contactogramme », qui montre les instants de contact sur les frettes pour le signal numérique, est présenté sur la figure 5.11(a). Plus précisément, les instants de contact et leur localisation sur le manche sont détectés pendant la simulation numérique et ensuite reportés en fonction des frettes frappées par la corde. La première collision intervient autour de 4×10^{-3} s, la corde heurte alors 12 frettes (voir les figures 5.6 et 5.12). Comme montré dans le zoom du premier ensemble de contacts (encart de la figure 5.11(a)), la corde frappe d'abord la 12^{ème} frette. Pour une meilleure compréhension du mouvement de la corde, ce premier ensemble de collisions peut être observé parallèlement à la figure 5.12, qui montre la forme de la corde à des instants compris dans cette période. Pendant le deuxième ensemble de contacts, la corde touche les frettes 2 à 11. Globalement, de moins en moins de frettes sont touchées. Un détail notable concerne le contact avec la première frette pendant le premier ensemble de collisions, qui cesse puis reprend relativement longtemps après, vers 0.05 s. Enfin, on constate que le contact entre la corde et les frettes peut être persistant sur des durées très courtes de l'ordre de 10^{-4} s au plus. Cela est illustré par les zooms de la figure 5.11(a); cependant l'échelle proposée ne permet pas de discerner le détail des zones présentant une persistance du contact, une impression de « trait » peut cacher plusieurs contacts persistants de durées plus courtes.

La variation relative de la fréquence fondamentale pendant le transitoire d'attaque est également représentée sur la figure 5.11(a) pour le signal expérimental et la simulation numérique. Elle est donnée par $\frac{\nu(t) - \nu_r}{\nu_r}$ où ν_r est la première fréquence propre identifiée de la corde (98 Hz), et $\nu(t)$ est la fréquence fondamentale instantanée du signal au temps t , obtenue avec l'algorithme YIN (CHEVEIGNÉ et al., 2002). Elle fournit une vision plus quantitative de la décroissance de la fréquence fondamentale observée sur les spectrogrammes. Plus spécifiquement, un comportement en escalier émerge, pour lequel une chute de la fréquence fondamentale s'opère chaque fois que le manche est frappé. La fréquence peut être directement liée au nombre de frettes heurtées : plus le nombre de frettes touchées est faible, plus la fréquence l'est également. À nouveau, la simulation et l'expérience sont très proches lorsque l'on analyse les variations de la fréquence fondamentale. Chaque ensemble d'impacts avec les frettes cause également une chute de l'énergie, comme on peut le voir sur la figure 5.10. Bien que l'augmentation de l'amplitude initiale entre les cas A et B implique une augmentation de l'énergie initialement fournie, celle-ci est dissipée plus rapidement dans le deuxième cas, par à-coups, à cause des contacts et de l'énergie transférée aux hautes fréquences pour lesquelles l'amortissement est plus élevé.

Malgré une concordance globale très satisfaisante, montrant la capacité du modèle à reproduire fidèlement les principaux éléments de l'expérience, certaines différences persistent. De nombreux facteurs peuvent les expliquer. Dans le modèle, l'obstacle est supposé rigide tandis qu'en réalité, il a une mobilité, pas seulement au sillet (cette mobilité est incluse dans le modèle) mais également sur l'ensemble du manche. Cela peut affecter le mouvement de la corde lors des contacts. Par ailleurs, des incertitudes interviennent à chaque étape de mesure. Hormis celles portant sur les fréquences propres, les amortissements et la position de pincement, qui s'avèrent être faibles et contrôlées comme montré par l'analyse du cas A, l'incertitude principale concerne le profil du manche et en particulier la position et la hauteur des frettes. De plus, les frettes sont supposées ponctuelles, tandis qu'elles ont en réalité une certaine largeur et sont courbes. Cette dernière incertitude ne nous semble cependant pas prédominante, et la réduire demanderait une très grande précision spatiale au niveau des frettes; nous n'avons donc pas exploré cet aspect. Par ailleurs, il s'avère que raffiner le pas spatial pour améliorer la précision des positions des frettes n'améliore pas significativement les résultats. Par contre, le son obtenu présente une grande sensibilité à la hauteur des frettes. Ceci est illustré à travers des exemples numériques dans la section 5.4.

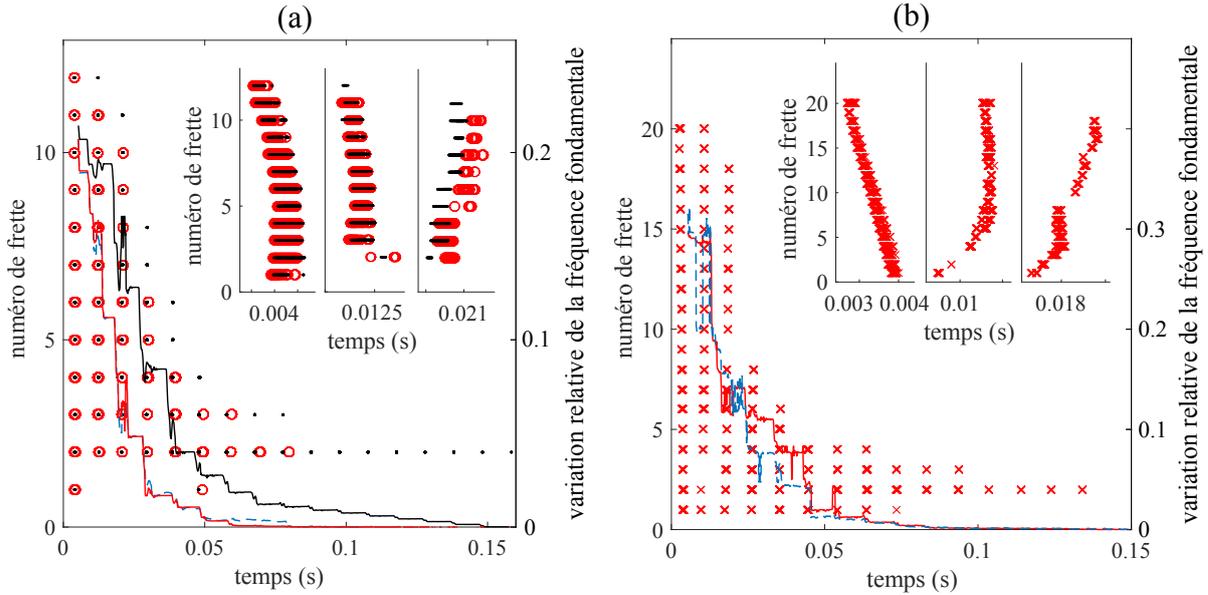


FIGURE 5.11 – (a) Cas B. Instants de contact pour la corde numérique avec (cercles rouges) et sans dispersion (points noirs), pour la basse munie de frettes. Variation relative de la fréquence fondamentale du signal expérimental (trait bleu pointillé) et des résultats numériques avec (trait rouge) et sans dispersion (trait noir). $u_{0,max} = 3.6$ mm, $F_e = 8$ MHz. Encart : zooms sur les trois premiers ensembles de contacts. (b) Cas C. Instants de contact (croix rouges) pour la corde numérique et variation relative de la fréquence fondamentale, expérimentale (trait bleu pointillé) et numérique (trait rouge), pour la basse munie de frettes. $u_{0,max} = 7.8$ mm, $F_e = 16$ MHz. Encart : zooms sur les trois premiers ensembles de contacts.

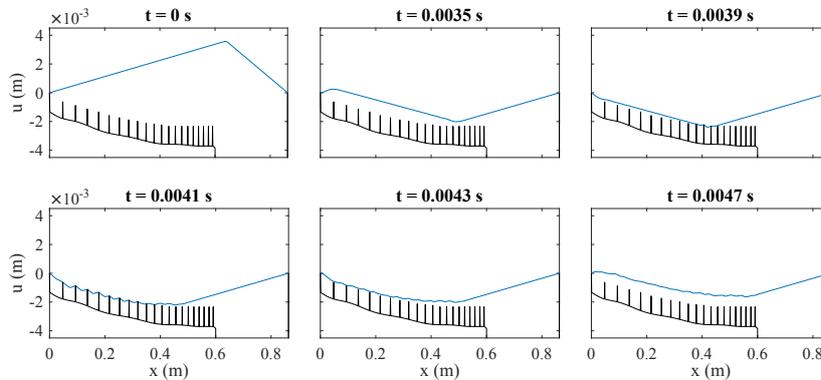


FIGURE 5.12 – Instantanés du déplacement de la corde numérique pendant la première période. $u_{0,max} = 3.6$ mm, $F_e = 8$ MHz.

5.3.2 Cas C : vibration avec contact sur 20 frettes

Le cas d'un déplacement initial plus grand, tel que $u_{0,max} = 7.8$ mm (cas C), est finalement étudié. Le nombre de frettes touchées est plus élevé que dans le cas B, ce qui résulte en un signal temporel plus complexe comportant un contenu hautes fréquences considérable. Cela se traduit par des oscillations rapides très présentes sur la figure 5.7(c), dès les premiers instants. L'accord de l'expérience avec le résultat numérique est à nouveau très satisfaisant, cependant les différences sont plus marquées que dans le cas B. Les spectrogrammes de la figure 5.8(c-d) montrent que les transferts d'énergie sont plus importants que dans le cas B et se produisent sur une période plus longue. S'ensuit une répartition d'énergie différente sur l'ensemble du signal. La partie percussive du son est à nouveau clairement visible pendant les premiers instants, et produit dans ce cas un son global plus nasal. Ce changement de contenu spectral est très bien reproduit par la simulation numérique, et se traduit par une fréquence caractéristique plus élevée sur toute la durée du signal.

Celle-ci est quasiment doublée par rapport au cas B pendant les premiers instants, comme on peut le voir sur la figure 5.9.

Le contactogramme de la figure 5.11(b) confirme l'augmentation du nombre de frettes touchées pour une amplitude initiale plus élevée. Pendant le premier ensemble de collisions, les 20 frettes sont heurtées en commençant par la dernière. On retrouve un comportement de la fréquence fondamentale en escalier, avec ici des différences accrues entre l'expérience et la simulation, en particulier autour de 0.04 s. Il est intéressant de noter que le glissement de fréquence est uniquement piloté par les instants de contact, et non par une non-linéarité géométrique qui pourrait être impliquée. Celle-ci n'étant pas prise en compte dans notre modèle, les résultats montrent clairement que le glissement de fréquence observé n'est pas généré par des non-linéarités associées à des variations de tension qu'un mouvement de grande amplitude occasionnerait.

Enfin, bien que le cas C se voie octroyer la plus grande amplitude initiale maximale, on observe sur la figure 5.10 une décroissance de l'énergie plus rapide que dans les cas A et B, car davantage de contacts interviennent.

Finalement, les trois cas exposés montrent que le modèle utilisé, malgré des hypothèses simplificatrices, inclut les éléments essentiels couvrant les informations les plus importantes présentes dans le signal, et en particulier dans le transitoire d'attaque. Les investigations détaillées dans les domaines temporel et spectral ont mis en évidence des phénomènes non linéaires pendant la vibration (enrichissement spectral, glissement de fréquence) qui peuvent être analysés de manière pertinente en termes d'instant de contact grâce aux contactogrammes, et qui sont fidèlement reproduits numériquement.

5.3.3 Mouvement 3D de la corde

Cette section est dédiée à l'investigation de la seconde polarisation à travers une comparaison de signaux expérimentaux et numériques. Pour cela, nous appliquons une condition initiale oblique avec un angle d'environ 55 degrés entre le plan d'excitation et le plan (xOy) , de manière à donner de l'énergie aux deux polarisations transversales.

La figure 5.13 montre les signaux temporels et spectrogrammes pour les deux polarisations, dont les déplacements initiaux maximaux sont $u_{0,max} = 3.1$ mm selon (Oz) et $v_{0,max} = 2.2$ mm selon (Oy) . Les paramètres de la force de frottement (voir l'équation (2.3.1)), ajustés empiriquement, sont $A = 900$ N.m⁻¹ et $s = 10^{-5}$ m.s⁻¹. On peut également observer le comportement d'une polarisation en fonction de l'autre sur la figure 5.14.

On remarque que le mouvement selon (Oy) garde une amplitude du même ordre de grandeur sur l'ensemble du signal, soit 1 s ici, tandis que dans le cas d'un obstacle ponctuel centré, il devient négligeable au bout de quelques périodes seulement (voir la section 4.3.2.3). En effet, l'obstacle sur la basse est plus éloigné de la corde et des contacts beaucoup plus courts interviennent, si bien que, malgré la distribution spatiale des frettes, le frottement agit moins souvent.

De même que dans la section précédente, l'accord entre expérience et simulation est très satisfaisant, aussi bien au niveau des signaux temporels où les détails des formes d'onde sont fidèlement reproduits, que sur les spectrogrammes, qui présentent de fortes similarités. Plus précisément, pour le déplacement horizontal v , une faible énergie vers 2400 Hz et des fréquences renforcées autour de 600, 900 et 1400 Hz peuvent s'observer expérimentalement et numériquement. Toutefois, des différences apparaissent également. Elles peuvent être dues aux incertitudes de mesure mentionnées précédemment. De plus, dans le cas présent, nous supposons la hauteur des frettes constante selon (Oy) dans le modèle. Elles ont en réalité une légère courbure, si bien que l'on pourrait considérer un modèle enrichi par la prise en compte de cette courbure ou par un coefficient de frottement variable en espace. Observons à présent la figure 5.14. Lors des tout premiers instants, le comportement est proche de celui observé dans le cas d'un obstacle ponctuel centré (voir la figure 4.14 de la section 4.3.2.3). Très rapidement cependant, les comportements

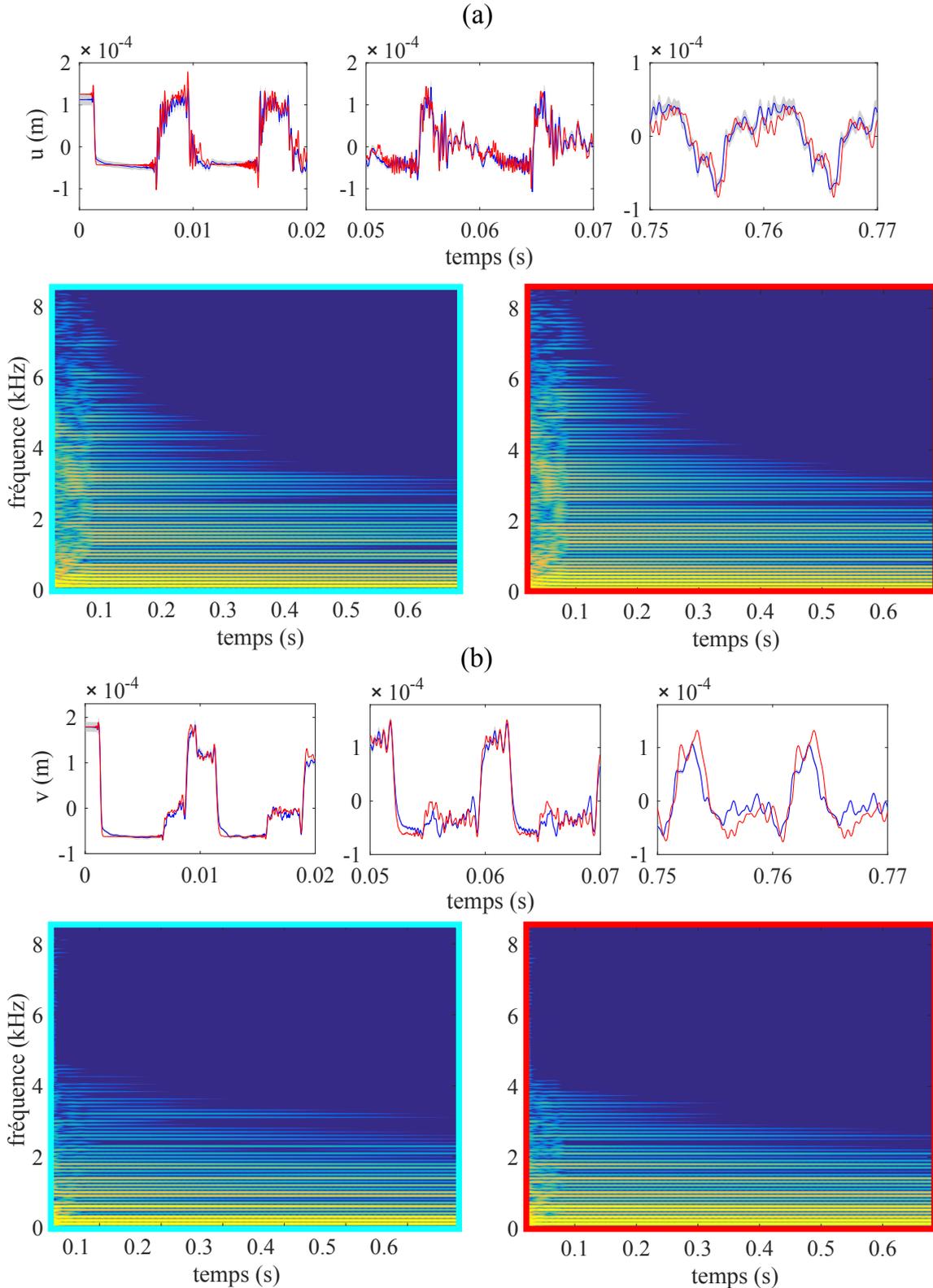


FIGURE 5.13 – Déplacement de la corde avec contact et spectrogrammes, deux polarisations sont excitées. Comparaison entre la mesure (trait bleu) et la simulation numérique (trait rouge), pour la basse munie de frettes. Incertitude étendue à 95 % (gris). Spectrogramme du signal expérimental (à gauche, cadre bleu) et de la simulation (à droite, cadre rouge). $u_{0,max} = 3.1$ mm, $v_{0,max} = 2.2$ mm, $F_e = 8$ MHz. (a) u , selon (Oz) (b) v , selon (Oy) .

différent significativement : en plus d'une amplitude notable selon (Oy) tout au long du signal, le plan de vibration de la corde semble être globalement soit vertical soit horizontal à partir de la

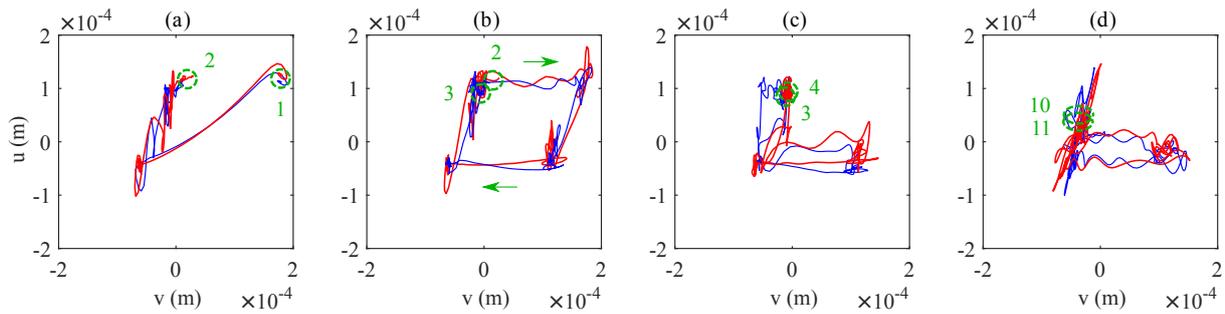


FIGURE 5.14 – Déplacement de la corde selon (Oz) (en $x = 854$ mm) en fonction du déplacement selon (Oy) (en $x = 845$ mm) obtenu expérimentalement (trait bleu) et avec la méthode mixte (trait rouge), $F_e = 8$ MHz. Les traits pointillés verts indiquent les début et fin des zones temporelles considérées. (a) 1^{ère} période (b) 2^{ème} période (c) 3^{ème} période (d) 10^{ème} période.

deuxième période.

Finalement, cette comparaison montre qu'un modèle très simple de couplage entre les deux polarisations, à travers un mécanisme de frottement, permet de décrire de manière pertinente la dynamique de la corde impliquant de nombreux contacts. Le modèle prend ainsi en compte les mécanismes physiques principaux, et peut à présent être utilisé pour une étude paramétrique dans la section 5.4.

5.4 Étude paramétrique sur la basse munie de frettes

Les sons produits à l'aide des techniques de jeu en pop et slap dépendent fortement du profil du manche, des matériaux de la corde et du manche, et du geste du musicien. La distance entre les cordes et les frettes peut être ajustée en fonction des préférences des musiciens : par exemple, une faible distance est *a priori* plus adaptée pour favoriser les contacts lorsque des jeux en pop et slap sont fréquemment employés. Pour autant, cette distance doit être suffisamment grande pour éviter des effets indésirables tels que la frise, si bien qu'un compromis doit être établi. Puis, pour un profil et des matériaux donnés, un musicien adapte son geste pour éventuellement provoquer des contacts, et façonner des sonorités, par exemple en choisissant un point de pincement particulier.

Dans cette section, nous souhaitons donner un premier aperçu de l'influence de ces paramètres sur le son. Ainsi, les effets des paramètres de contact, de la dispersion, du point de pincement et du profil du manche sont étudiés numériquement.

5.4.1 Dispersion de la corde

Le choix de la corde, et plus particulièrement de ses matériaux et diamètre, peut conduire à diverses propriétés de dispersion. Son influence sur le transitoire d'attaque est observée ici.

La figure 5.11(a) montre les instants de contact ainsi que le glissement de fréquence fondamentale pendant le transitoire d'attaque, avec et sans dispersion. À partir du troisième ensemble de contacts (*i.e.* à partir d'environ 0.02 s), les collisions interviennent plus tôt en l'absence de dispersion. De plus, les contacts interviennent sur plus de 0.15 s contre moins de 0.1 s dans le cas dispersif, et le nombre de frettes heurtées décroît moins vite qu'avec dispersion. De ce fait, le glissement de fréquence dure plus longtemps, comme on peut le voir sur la figure 5.11(a). On retrouve cette observation sur le spectrogramme de la figure 5.15, où l'intervalle de temps sur lequel des contacts interviennent, caractérisé par des transferts d'énergie complexes, dure 0.15 s.

Les effets de la dispersion sont donc importants et modifient significativement le son produit, principalement à travers des transferts d'énergie se produisant sur une durée plus longue ainsi qu'un changement de timbre sur l'ensemble du son. Toutefois, la dispersion se montre moins déterminante que dans le cas de la tampoura. En effet, pour la tampoura, l'absence de dispersion

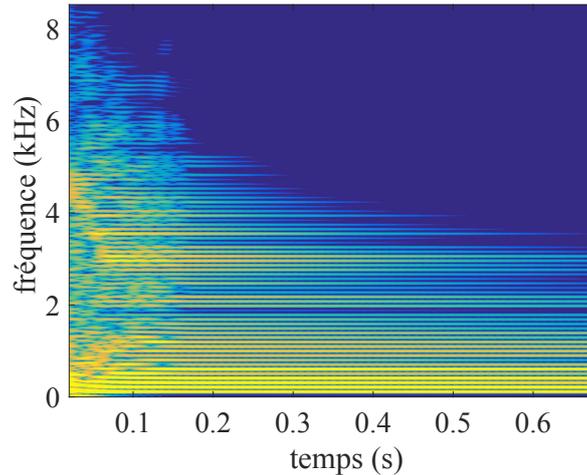


FIGURE 5.15 – Spectrogramme du signal numérique sans dispersion. $u_{0,max} = 3.6$ mm, $F_e = 8$ MHz.

provoque la disparition des formants descendants, or ceux-ci sont essentiels aux sons produits (voir la section 4.3.4). Dans le cas de la basse électrique, la dispersion joue un rôle notable dans le transitoire d'attaque, mais son absence ne dénature pas les sons de manière aussi marquante que pour la tampoura. Cela peut être lié au fait que, dans le cas de la tampoura, les contacts corde/obstacle interviennent pendant toute la vibration de la corde, tandis que dans le cas présent les collisions ne se produisent que pendant le transitoire d'attaque.

5.4.2 Un paramètre du musicien : l'influence du point de pincement

Lorsque le musicien joue de la basse électrique, l'un de ses moyens d'action s'exprime à travers la condition initiale qu'il impose aux cordes. Dans cette section, nous étudions l'influence d'un élément simple de cette excitation : la position du pincement. La configuration est celle de la section 5.3.1, seul le point de pincement est modifié. Trois positions sont testées : près du chevalet (cas a), au milieu de la corde (cas b) et près du sillet (cas c).

Les spectrogrammes correspondant à chacune de ces situations sont montrés sur la figure 5.16(a-c). La conséquence la plus marquante du changement de position de pincement est la durée sur laquelle des contacts interviennent. La plus courte correspond au cas b et la plus longue au cas c. Ceci est plus clairement identifié sur la figure 5.16(d) qui présente les contactogrammes associés. Lorsque la corde est pincée près du chevalet et au milieu de la corde, certaines frettes sont heurtées au début, puis leur nombre décroît. Ce comportement est similaire aux cas B et C étudiés dans la section 5.3, et conduit à une attaque percussive avec plus de hautes fréquences lorsque davantage de contacts sont en jeu. Quand la corde est pincée près du sillet, un comportement totalement différent émerge. Certaines frettes sont frappées au début, leur nombre décroît ensuite rapidement à une seule frette (la dernière), jusqu'à ce que plus aucun contact n'intervienne entre 0.25 et 0.35 s. Après cet instant, de nombreux contacts apparaissent, y compris sur des frettes sur lesquelles il n'y a pas eu de contact depuis plusieurs dixièmes de secondes, éventuellement depuis le début. Par exemple, le premier contact entre la corde et la deuxième frette se produit à 0.85 s. Ce comportement particulier conduit à de la frise. Notons que ce phénomène résulte d'une combinaison de divers éléments, concernant en particulier le réglage du manche et la condition initiale ; un profil modifié ou une amplitude de pincement différente peut ainsi conduire à un comportement très différent.

Les cas étudiés mettent en évidence l'influence du point de pincement sur le son produit : pour accroître le rôle des collisions, le musicien peut soit pincer la corde plus fort (voir la section 5.3), soit

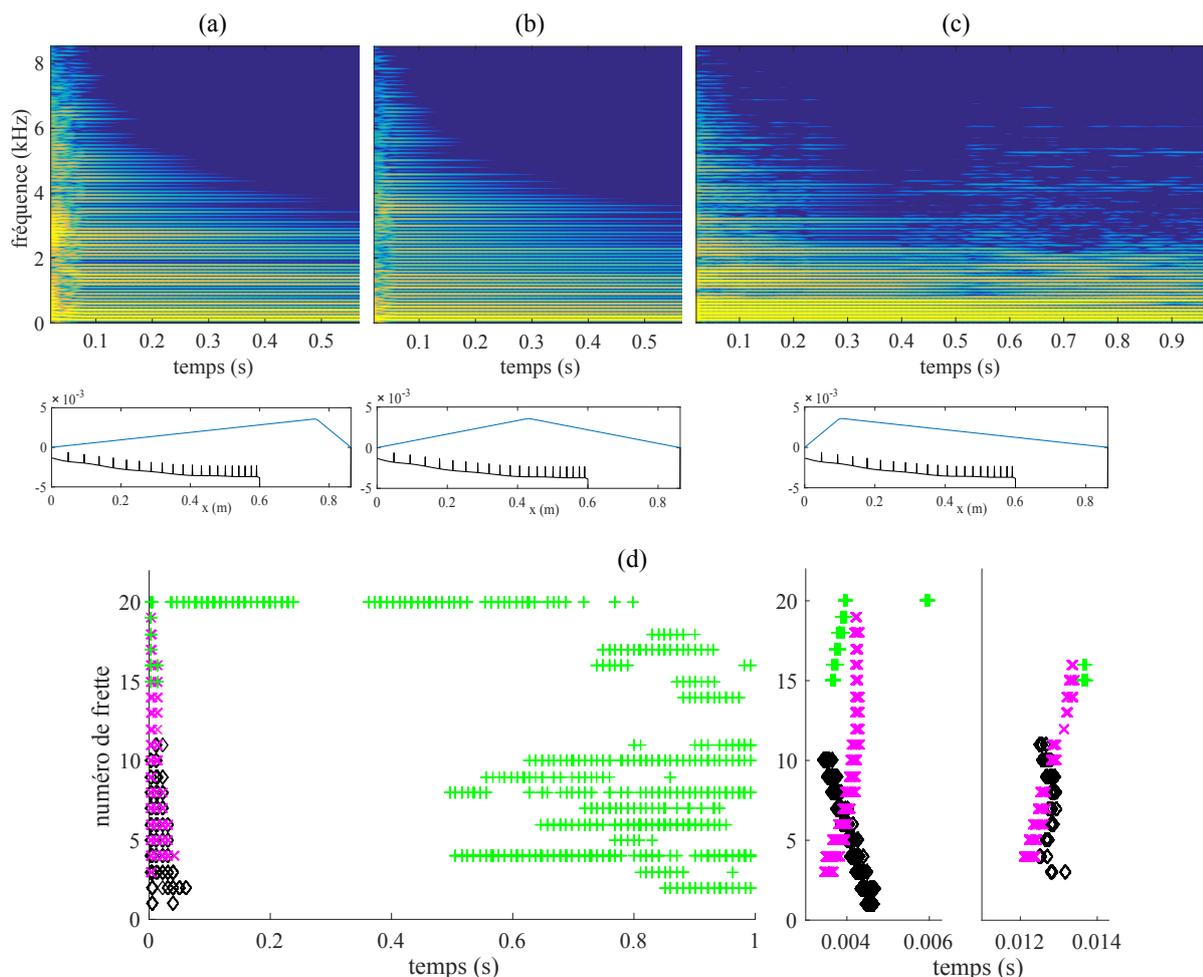


FIGURE 5.16 – Effet du point de pincement, $u_{0,max} = 3.6$ mm, $F_e = 4$ MHz. (a-c) En haut : Spectrogrammes des signaux numériques, en dB avec une dynamique de 70 dB. En bas : configurations initiales. Pincement en : (a) $x = L - 0.1$ m (b) $x = L/2$ m (c) $x = 0.1$ m. (d) Instants de contact pour la corde numérique pincée en $x = L - 0.1$ m (losanges noirs), $x = L/2$ m (croix magentas) et $x = 0.1$ m (signes plus verts).

la pincer à des positions différentes. Bien que cela arrive ici pour une position de jeu inhabituelle, le cas produisant de la frise (cas c) est particulièrement intéressant, car il montre la possibilité d'un contact « grandissant » qui produit un son généralement indésirable. Éviter cet effet est essentiel et cette problématique s'avère fortement liée au profil du manche, qui est une préoccupation majeure lors de son réglage.

5.4.3 Un paramètre de réglage du luthier : le profil des frettes

Dans cette section, nous donnons un aperçu de l'influence du profil du manche dans le cas d'un faible déplacement initial, de manière à ce qu'il n'y ait pas de contact pour le manche mesuré, à travers deux exemples : la réduction de la courbure du manche et le rehaussement d'une frette.

La figure 5.17(a-c) montre les spectrogrammes du déplacement de la corde pour trois courbures de manche. La première correspond au profil mesuré, avec une distance $d_{12} = 2.3$ mm entre la corde au repos et la 12^{ème} frette. La courbure est ensuite réduite en élevant les frettes à l'intérieur du manche de manière uniforme jusqu'à obtenir $d_{12} = 2$ mm, la première et la dernière n'étant pas modifiées. La troisième courbure testée correspond à un manche droit, la ligne droite étant basée sur les première et dernière frettes mesurées. Dans ce cas, $d_{12} = 1.8$ mm. La corde est pincée avec un déplacement initial maximal de 1.8 mm, à 60 cm du silet, de manière à ne pas avoir de contact

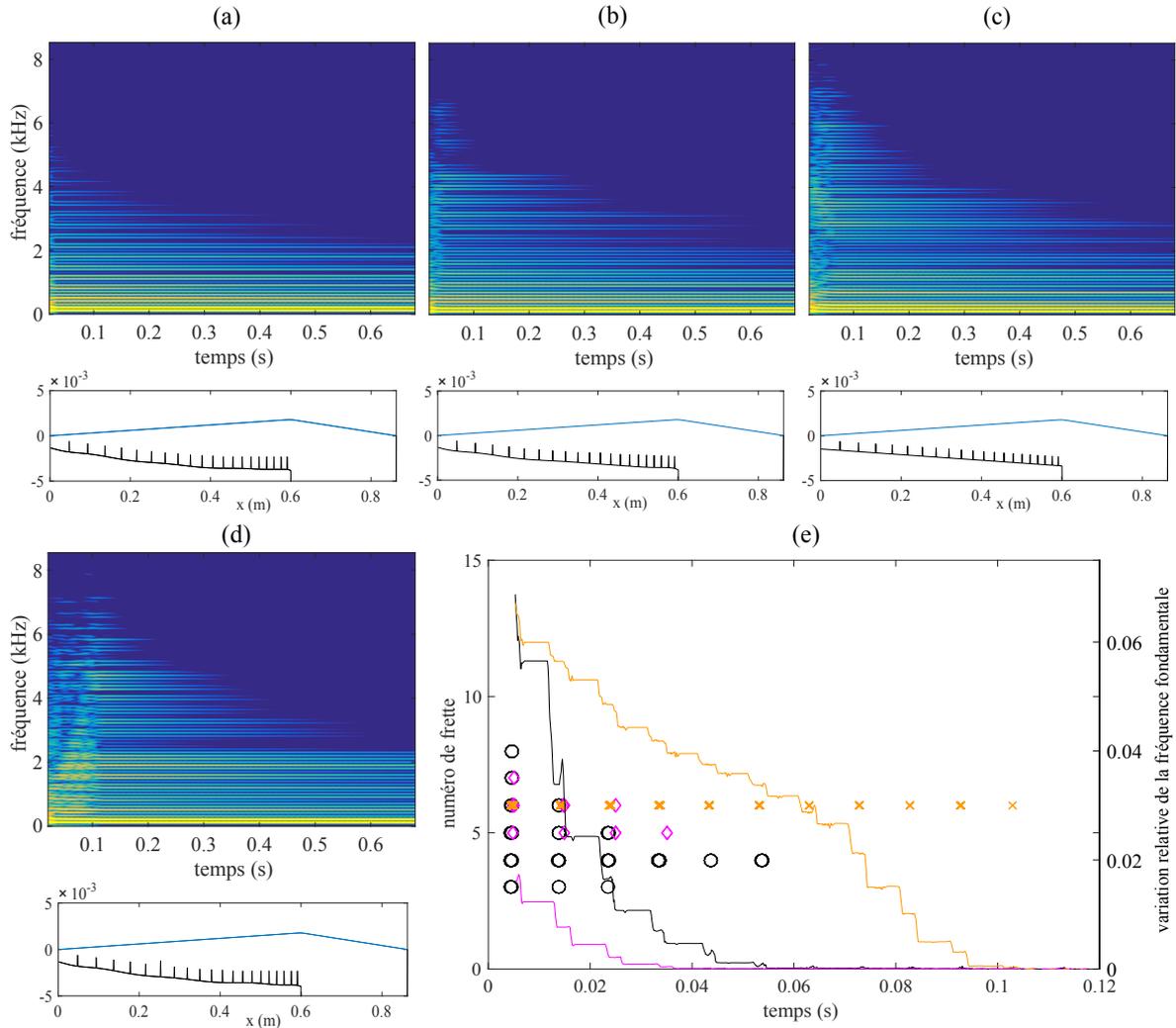


FIGURE 5.17 – Variations de la courbure du manche. En haut : Spectrogrammes des signaux numériques, en dB avec une dynamique de 70 dB. En bas : Configuration initiale (profil du manche en noir et position de la corde en bleu). $u_{0,max} = 1.8$ mm, $F_e = 2$ MHz. (a) Profil mesuré (plus grande courbure testée) (b) Courbure intermédiaire (c) Profil droit (d) Sixième frette rehaussée de 0.5 mm. (e) Instants de contact pour la corde numérique avec une courbure intermédiaire (losanges magentas), un profil droit (cercles noirs) et la sixième frette rehaussée (croix oranges). Variation relative de la fréquence fondamentale avec une courbure intermédiaire (trait magenta), un profil droit (trait noir) et la sixième frette rehaussée (trait orange).

dans le cas du profil mesuré. Lorsque l'on réduit la courbure, des collisions apparaissent comme montré sur la figure 5.17(e). Dans le cas d'un manche droit, les contacts interviennent plus tôt. De plus, davantage de frettes sont frappées au début et le glissement de fréquence démarre avec une fréquence plus élevée. Sur les spectrogrammes, de plus hautes fréquences sont impliquées, la zone perturbée du transitoire d'attaque dure plus longtemps et des zones spectrales renforcées plus évidentes se dessinent. Notons qu'un profil trop droit peut typiquement engendrer de la frise sur des cordes à vide, cependant cela ne se produit pas avec l'ensemble de paramètres considéré ici.

Considérons à présent le cas du profil mesuré sur lequel la sixième frette serait rehaussée de 0.5 mm. Comme illustré par les figures 5.17(d-e), les contacts avec la sixième frette affectent considérablement le son résultant, pendant le transitoire d'attaque mais également sur toute la durée du son. On peut en particulier observer un glissement de fréquence dû à la variation d'amplitude résultant des amortissements de la corde, ainsi qu'à la position de l'obstacle ponctuel rencontré, en-dessous de la corde au repos. Ce glissement n'a en effet pas lieu lorsque l'obstacle

est affleurant (voir la section 4.3.2) car alors, quelque soit l'amplitude du mouvement, le rapport entre les fréquences fondamentales sans et avec obstacle est inchangé, ce qui n'est plus le cas lorsque l'obstacle est abaissé (voir l'annexe B).

Les cas présentés mettent en évidence la sensibilité du son à l'ajustement des frettes à travers une illustration de problématiques typiques de la facture de basses électriques, celle-ci requérant des ajustements précis du manche. Ils donnent également un premier aperçu de la manière dont le modèle pourrait être utilisé à des fins pédagogiques par exemple.

5.4.4 Raideur du contact

Dans les simulations, la durée de la période globale de contact, correspondant à une partie transitoire complexe, dépend fortement de la position de l'obstacle ainsi que de la raideur numérique du contact. Moins l'obstacle est raide, plus les collisions interviennent longtemps. Les paramètres régissant cette raideur peuvent être reliés aux matériaux en contact (MACHADO et al., 2012; BANERJEE et al., 2017), ils participent à la production du son et peuvent à ce titre être ajustés à travers les propriétés des matériaux.

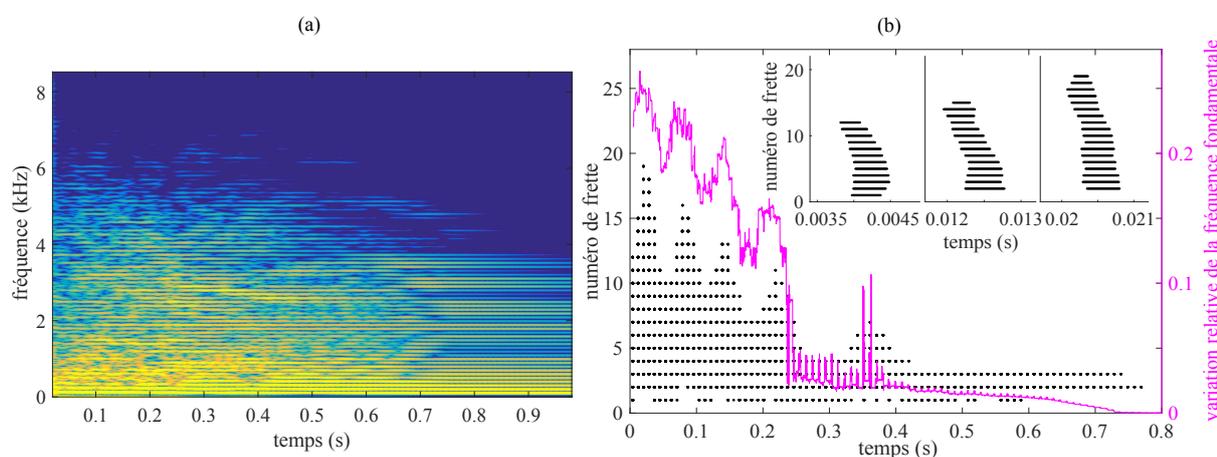


FIGURE 5.18 – Signal numérique avec $K = 10^9$, $u_{0,max} = 3.6$ mm, $F_e = 4$ MHz. (a) Spectrogramme du signal numérique. (b) Instants de contact pour la corde numérique (points noirs) et variation relative de la fréquence fondamentale (trait magenta).

Pour une valeur de K suffisamment petite, par exemple $K = 10^9$, le glissement de fréquence précédemment mentionné peut être entendu distinctement pendant la période avec contacts. Celle-ci s'étend sur plusieurs dixièmes de seconde, comme on peut le voir sur la figure 5.18. L'estimation de la fréquence fondamentale présente des croissances et décroissances successives étroitement liées au nombre de frettes frappées (voir la figure 5.18(b)). Cela induit des transferts d'énergie illustrés par la figure 5.18(a). Les contacts étant moins raides que pour $K = 10^{13}$, les modes les plus élevés ont moins d'énergie; cela peut être observé en comparant les figures 5.18(a) et 5.8(a-b).

Nous nous tournons à présent vers la basse *fretless*, sur laquelle aucune frette n'est présente, si bien que la corde entre directement en contact avec le manche.

5.5 Basse *fretless*

Nous considérons à présent la corde décrite dans la section 5.1 installée sur un modèle de basse similaire à celui de la basse étudiée jusqu'ici, mais dépourvu de frette (basse *fretless*). Son profil est présenté sur la figure 5.19. Les paramètres du modèle numérique sont rappelés dans le tableau 5.3. En particulier, bien que le manche soit en bois tandis que les frettes, lorsqu'elles sont

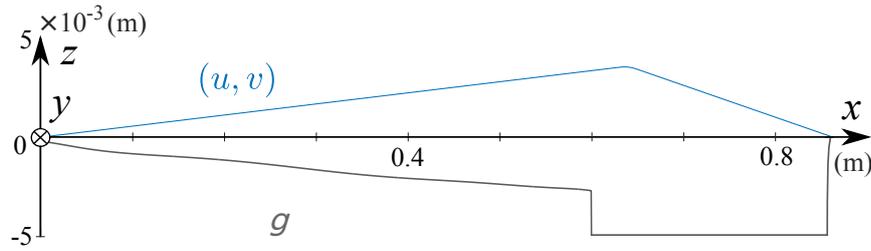


FIGURE 5.19 – Une corde de longueur L vibrant contre un manche de guitare basse *fretless* représenté par la fonction g .

présentes, sont en métal, nous employons les mêmes valeurs de K et α pour les deux basses, par comparaison avec l'expérience. Enfin, une fréquence d'échantillonnage de 32 MHz est choisie, d'après le critère de convergence énoncé dans la section 5.3. Cette valeur est plus élevée que dans le cas de la basse munie de frettes car les contacts interviennent non plus seulement aux positions des frettes mais potentiellement sur l'ensemble du manche.

B	δ_{ve}	Q_{te}^{-1}	α	K	N
3.5×10^{-5}	<i>fretless</i> : 0.014	6×10^{-6}	1.5	10^{13}	863

TABLE 5.3 – Paramètres du modèle pour la basse électrique *fretless*.

La figure 5.20 compare les signaux temporels issus de l'expérience et de la simulation obtenue avec la méthode mixte, ainsi que l'énergie du signal numérique. La figure 5.21 présente les spectrogrammes correspondants.

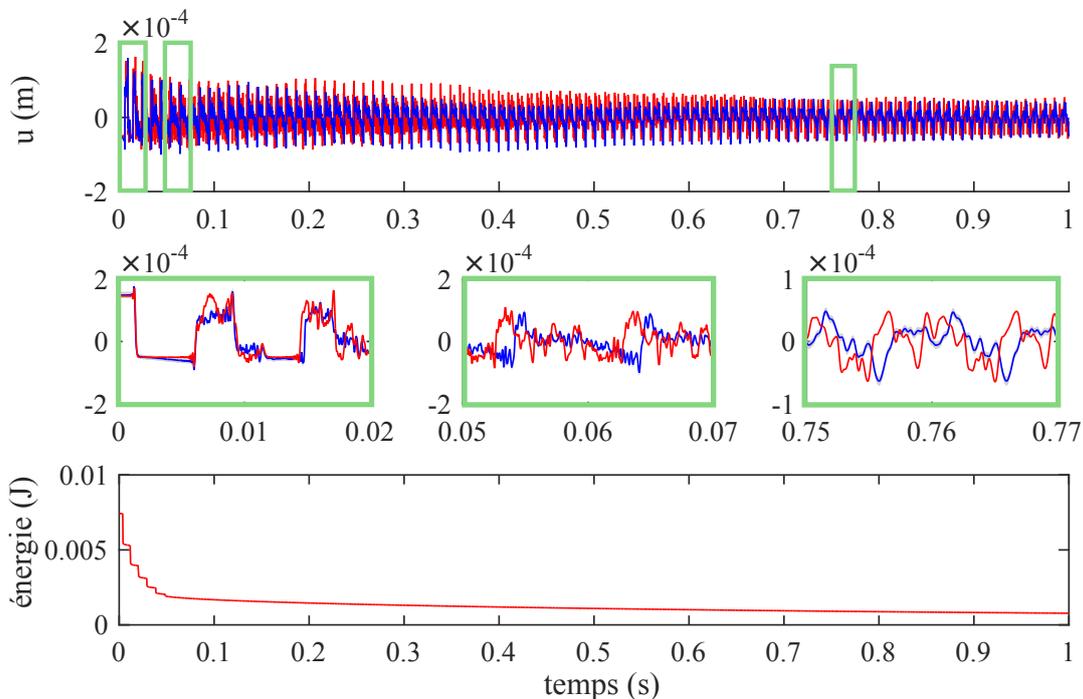


FIGURE 5.20 – Déplacement de la corde dans le cas de contacts corde/manche (basse *fretless*), $u_{0,max} = 3.6$ mm, $F_e = 32$ MHz. Comparaison entre la mesure (trait bleu) et la simulation numérique issue de la méthode mixte (trait rouge), la variable observée est le déplacement selon (Oz) à 9 mm de l'extrémité $x = L$. Incertitude étendue à 95 % (gris).

Par rapport au cas de la basse munie de frettes, on constate que les hautes fréquences sont moins présentes, et ce aussi bien sur le signal expérimental que sur la simulation. Cependant, la

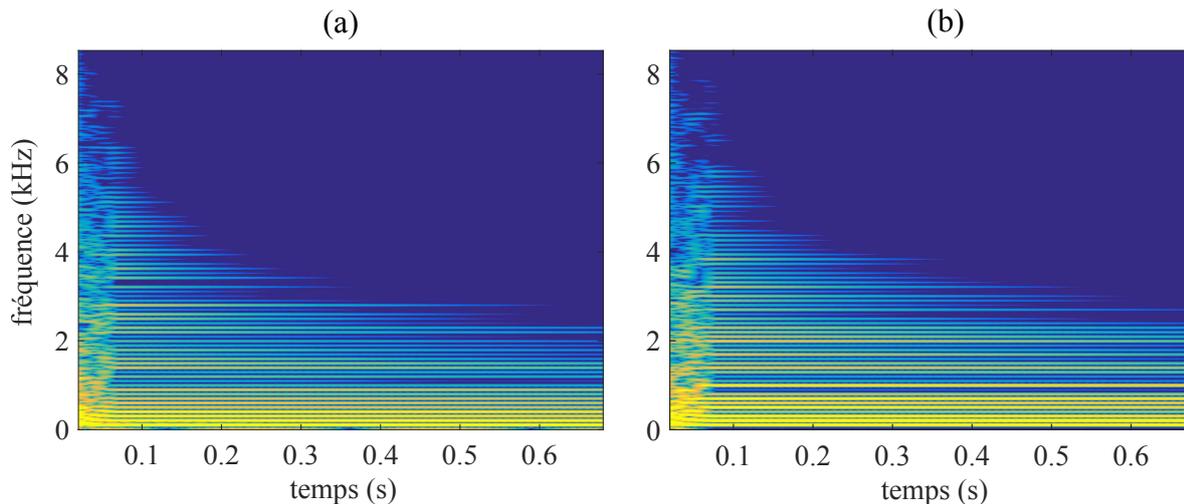


FIGURE 5.21 – Spectrogrammes du déplacement dans le cas de contacts corde/manche (basse *fretless*) avec $u_{0,max} = 3.6$ mm et $F_e = 32$ MHz, en dB avec une dynamique de 70 dB. (a) Expérimental (b) numérique.

correspondance entre simulation et expérience présente davantage de différences, notamment un déphasage significatif visible sur la figure 5.20. Sur les spectrogrammes, bien que l'évolution globale par rapport à la basse munie de frettes soit commune, on observe une répartition différente de l'énergie. Cela est certainement dû à l'incertitude relativement élevée sur la mesure du profil du manche, le réalisme de la simulation profiterait donc d'une mesure plus précise. Une telle mesure pourrait par exemple être obtenue à l'aide d'un profilomètre dont la précision serait au moins de l'ordre de $10 \mu\text{m}$. Notons l'existence de la machine Plek, un outil de réglage de guitare en possession d'un seul luthier en France, qui permet notamment une mesure précise du profil de manche (PLEK). Son utilisation ou celle de tout outil de mesure du profil nécessite de mener l'ensemble des mesures de vibration de corde dans les mêmes conditions, idéalement aux mêmes endroit et moment, afin que la courbure du manche ne soit pas affectée par une déformation des matériaux liée à d'éventuelles variations de température ou d'hygrométrie.

Par ailleurs, on peut observer des chutes d'énergie plus importantes et brutales que pour la basse non frettée en comparant les figures 5.10 et 5.20, ce qui est probablement lié à la surface plus importante de l'obstacle soumise à des contacts lors de la vibration de la corde.

La figure 5.22 présente le contactogramme associé à la simulation de corde sur basse *fretless*, ainsi que les variations de fréquence fondamentale du signal expérimental et de la simulation numérique. La figure 5.23 montre la corde à différents instants compris dans la première période de sa vibration. Les contacts ne sont pas restreints aux positions des frettes comme dans le cas d'une basse munie de frettes, mais peuvent intervenir sur chaque point du manche. On observe que la corde peut être en contact avec de multiples zones du manche simultanément. Contrairement aux cas impliquant des contacts ponctuels, on n'observe plus de contact persistant aussi prononcé. Les durées de contact sont de l'ordre de 10^{-6} s seulement et ces contacts s'apparentent davantage à des rebonds. Les variations de fréquence font apparaître une différence notable entre simulation et expérience, observée également sur la figure 5.20. De même que dans le cas de la basse munie de frettes, une décroissance par paliers donne lieu à un glissement de fréquence sur les premiers instants des signaux.

Finalement, l'étude que nous avons menée sur la basse électrique met en évidence la capacité du modèle mixte à reproduire les changements de timbres pour des configurations différentes. Toutefois, la précision de la mesure du manche dans l'expérience menée ici ne permet pas une fidélité comparable à celle du cas de la basse munie de frettes. Comme cela a été mis en évidence lors de tests paramétriques sur la basse frettée, le son obtenu est en effet très sensible à la hauteur

de l'obstacle (frettes ou manche).

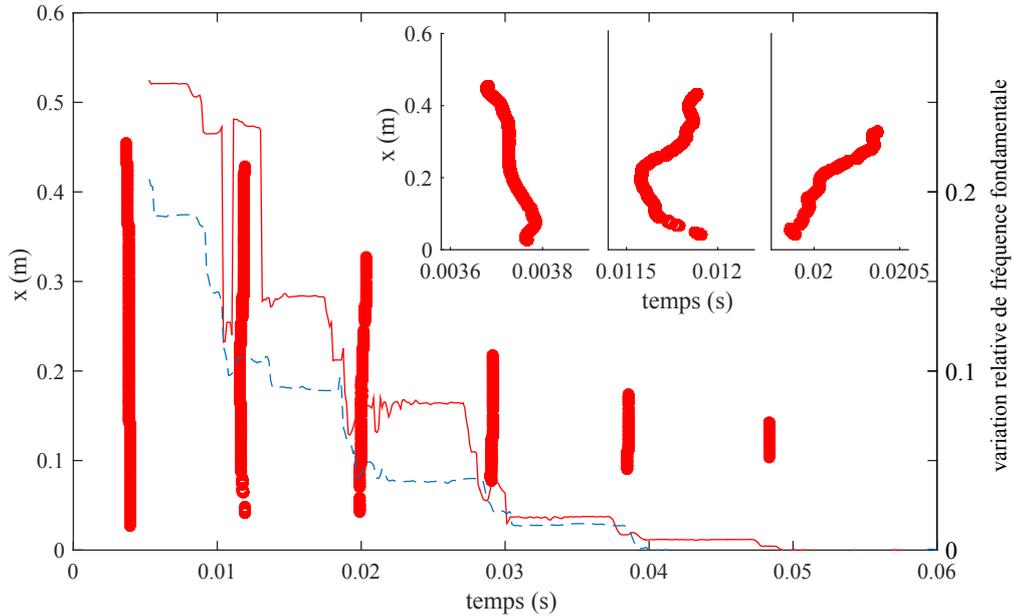


FIGURE 5.22 – Instants de contact pour la corde numérique (cercles rouges), basse *fretless*. Variation relative de la fréquence fondamentale du signal expérimental (trait bleu pointillé) et de la simulation numérique (trait rouge). $u_{0,max} = 3.6$ mm, $F_e = 32$ MHz. Encart : zooms sur les trois premiers ensembles de contacts.

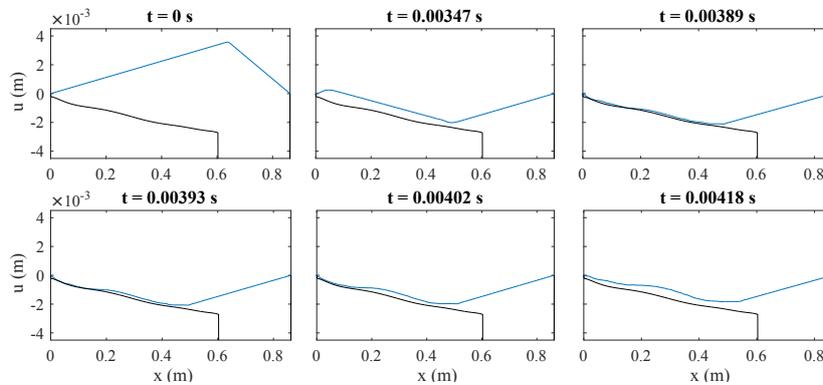


FIGURE 5.23 – Instantanés du déplacement de la corde numérique pendant la première période. $u_{0,max} = 3.6$ mm, $F_e = 32$ MHz.

5.6 Conclusion

À travers l'étude d'une corde de basse électrique installée sur instrument, nous avons mis en œuvre des simulations numériques impliquant une corde vibrante en présence d'un obstacle distribué et reliée à une structure mobile. Les correspondances fortes entre simulations et expériences mettent en évidence la pertinence des hypothèses du modèle ainsi que la capacité du schéma à traiter correctement les contacts corde/obstacle en jeu, selon les deux polarisations transversales. Les simulations numériques se montrent très fidèles à l'expérience, particulièrement dans le cas de la basse munie de frettes. Dans le cas de la basse *fretless*, elles souffrent d'un manque de précision de la mesure du profil du manche. En particulier, il se peut qu'une comparaison entre simulations

et expérience pour un profil mesuré avec davantage de précision donne lieu à des valeurs de K et α différentes.

Les contacts entre la corde et les frettes ou le manche pendant le transitoire d'attaque induisent un glissement de fréquence, qui n'est pas lié à une non-linéarité géométrique de la corde. De plus, de nombreux transferts d'énergie interviennent entre les modes tant que des contacts ont lieu. Le modèle ayant donné satisfaction lors des diverses confrontations aux résultats expérimentaux pour la basse munie de frettes, une étude paramétrique numérique a ensuite été présentée. Le modèle a ainsi permis, dans le cadre des hypothèses de l'étude, une prédiction de l'influence de paramètres contrôlés par le musicien et le luthier tels que le point de pincement et le profil du manche. En particulier, le phénomène de frise est apparu dans l'un des cas étudiés, il est particulièrement intéressant car étroitement lié à une problématique clef récurrente dans le réglage de l'instrument.

Quatrième partie

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Les contacts entre cordes et obstacles unilatéraux interviennent sur de nombreux instruments de musique, provoqués par différents éléments, du chevalet de la tampoura aux frettes de la basse électrique. Intentionnellement provoqués ou non, ils contribuent de manière essentielle aux sons produits et sont à ce titre l'objet de grandes attentions de la part des fabricants d'instruments et des musiciens. Dans ce manuscrit, nous avons cherché à comprendre l'action d'un obstacle unilatéral sur la vibration d'une corde et les conséquences des contacts corde/obstacle. Pour cela, nous avons adopté une démarche reposant sur une étude à la fois analytique, numérique et expérimentale du problème. Une synthèse des travaux effectués selon ces trois démarches est présentée dans la figure 5.24.

La méthodologie que nous avons adoptée se compose de cinq étapes. La première consiste à décrire la corde vibrante en présence d'un obstacle unilatéral, à l'aide d'un modèle physique pertinent qui prenne en compte les phénomènes essentiels mis en jeu. En particulier, nous avons choisi de nous appuyer sur une description modale de la corde afin d'assurer une représentation fine des fréquences propres et amortissements de la corde, éléments essentiels dans les applications musicales, auxquels l'oreille humaine est très sensible. Suite à cela, nous avons développé des méthodes numériques basées sur ces modèles physiques, afin de simuler numériquement le mouvement de telles cordes. Le développement de ces schémas constitue l'apport principal des travaux menés dans ce manuscrit. Nous avons pris le parti de développer des méthodes conservant une énergie discrète (ou la dissipant si des amortissements physiques sont pris en compte), afin d'assurer la stabilité des schémas obtenus. Avant toute application, ce développement s'accompagne systématiquement d'une étude de convergence afin d'assurer la fiabilité des simulations observées. La troisième étape est une validation des résultats numériques par rapport à une solution analytique dans le cas d'une corde idéale. Nous avons ensuite, dans une quatrième étape, confronté les simulations à des expériences, dans lesquelles de nombreux phénomènes physiques sont mis en jeu et doivent être contrôlés. Ces deux processus de validation permettent de s'assurer de la capacité des modèles et méthodes numériques employés à prendre en compte les phénomènes physiques essentiels du problème considéré. Une fois cela vérifié, nous utilisons les simulations afin d'étendre la compréhension que nous avons de certains phénomènes physiques observés expérimentalement. Elles ont en effet l'avantage majeur de permettre une réalisation facilitée d'études paramétriques par l'ajout, la suppression ou la modification de certains paramètres. De nombreuses autres applications sont envisageables, nous y reviendrons. Nous décrivons à présent plus en détail les résultats obtenus dans ce manuscrit.

Les trois schémas numériques développés s'appuient sur une description modale de corde linéaire, ainsi qu'une discrétisation exacte de l'équation régissant son déplacement en l'absence de contact; cela permet d'éviter des effets tels que la dispersion numérique, particulièrement indésirable dans les applications musicales. Deux de ces schémas s'appuient sur des forces de contact et de frottement régularisées. La force de contact est ainsi exprimée comme une fonction continue de la pénétration de la corde dans l'obstacle. Parmi les deux schémas issus de cette régularisation, l'un opère dans l'espace physique, il est dit « mixte »; le second opère dans l'espace modal. Ce dernier s'exprime sous la forme d'une famille générale de schémas conservatifs applicable à tout système d'équations couplées par un terme dérivant d'un potentiel. Cependant il n'a pas été exploité plus avant car une étude plus approfondie de ses propriétés serait souhaitable

avant utilisation. Le troisième schéma est basé sur une approche non régulière, c'est-à-dire qu'il n'autorise *a priori* pas de pénétration, et peut prendre en compte des sauts de vitesse. Nous avons choisi un schéma à capture d'évènements, il ne nécessite ainsi pas la recherche des instants de contact, contrairement aux schémas à détection d'évènements. Pour cette méthode, nous avons mené la résolution à terme dans le cas d'un obstacle ponctuel ; la prise en compte d'un obstacle distribué nécessite une étape supplémentaire.

Avant toute application des schémas mixte et non régulier, nous avons procédé à une étude de convergence mettant en exergue la nécessité d'une fréquence d'échantillonnage élevée pour l'obtention de résultats fiables, qui puissent en particulier être comparés à des résultats expérimentaux. Toutefois des résultats satisfaisants selon d'autres critères, par exemple pour de la synthèse sonore, peuvent être obtenus pour des valeurs moindres. Une première validation des résultats numériques a ensuite été menée par comparaison avec la solution analytique dans le cas d'une corde idéale et d'un obstacle ponctuel centré affleurant la corde au repos. Cette solution exhibe notamment un changement de fréquence fondamentale que nous avons retrouvé numériquement. Par ailleurs, nous avons exposé un certain nombre de résultats de périodicité du mouvement d'une corde idéale en présence d'un obstacle unilatéral présentés dans la littérature, puis nous avons étendu ces résultats de manière empirique au cas d'obstacles et pincements à des fractions entières de la corde. Nous avons ainsi vu que la fréquence fondamentale pouvait être augmentée ou diminuée en fonction des positions de l'obstacle et du pincement.

Une fois cette étape complétée, nous avons soumis les résultats numériques à une confrontation à des résultats expérimentaux, afin d'en vérifier la validité par rapport à une situation réelle impliquant notamment la dispersion et l'amortissement de la corde. Les comparaisons ont été effectuées sur des temps longs, de 1 à 3 s, et sous divers angles d'observation. Dans le cas d'un obstacle ponctuel, les méthodes régularisante et non régulière ont montré des résultats extrêmement semblables et d'une grande fidélité par rapport à l'expérience. Une analyse des signaux temporels puis de l'évolution de leur contenu spectral a en particulier mis en évidence des échanges d'énergie complexes et très riches, et l'importance de la dispersion dans ce mécanisme. En particulier, celle-ci est à l'origine des formants descendants caractéristiques de la tampoura et confèrent ainsi la signature de cet instrument. La méthode non régulière ayant été abordée durant les derniers mois de la thèse, elle n'a pas été employée pour des obstacles distribués. Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous n'avons pas observé de différence majeure entre les méthodes régularisantes ou non. En revanche, le schéma régularisant nécessite d'ajuster davantage de paramètres par rapport à l'expérience. En termes de temps de calcul, la méthode non régulière s'est montrée beaucoup plus avantageuse, cela est toutefois nuancé par le fait que cette méthode a été mise en place et adaptée pour un obstacle ponctuel seulement, ce qui permet une résolution très simple, tandis que le schéma mixte est adapté à un obstacle quelconque.

La méthode mixte a également été mise à profit dans le cas d'une corde installée sur des basses électriques, l'une munie de frettes et l'autre non. À nouveau, une expérience a permis de confronter les simulations à la vibration réelle de la corde. Une correspondance très satisfaisante a été observée pour différentes amplitudes initiales. Le cas de la basse *fretless* souffre cependant d'une précision insuffisante de la mesure du profil de manche. L'intervalle de temps sur lequel des contacts interviennent est le siège d'échanges d'énergie vers les hautes fréquences ; de plus, un glissement de fréquence imputable à la présence de l'obstacle a été observé lors des premiers instants de la vibration.

Ce n'est qu'une fois cette validation expérimentale effectuée, précédée d'une étape de validation par rapport à une solution analytique, que nous avons utilisé le schéma mixte comme un outil numérique pour éclairer notre compréhension de l'influence de certaines caractéristiques physiques sur le son produit. Nous avons ainsi mené une étude paramétrique dans laquelle les

éléments étudiés retracent en particulier des problématiques fréquemment rencontrées par les musiciens et luthiers, qui doivent parvenir à un compromis entre une distance cordes/frettes suffisamment petite pour que le jeu soit agréable au musicien, et suffisamment grande pour que des contacts non désirés (frise) ne viennent pas perturber la vibration de la corde. Les luthiers sont depuis longtemps conscients de la grande sensibilité de la qualité du jeu et des sons produits à la hauteur des frettes, les ajustements de la hauteur des frettes étant de l'ordre du dixième de mm. Les exemples de simulations numériques ont mis en évidence la sensibilité du son à la forme du manche ainsi qu'au point de pincement du musicien. Les exemples proposés laissent entrevoir la possibilité d'une utilisation des schémas numériques pour la prédiction du comportement vibratoire des cordes et l'aide au réglage.

La figure 5.24 fait enfin état de certaines perspectives des travaux menés. Ainsi, il serait intéressant de compléter l'étude empirique que nous avons menée afin de déterminer certaines solutions périodiques pour une corde vibrante en présence d'un obstacle ponctuel et pincée à une fraction entière de la corde. En effet, de nombreuses solutions périodiques existent qui ne semblent pas avoir été étudiées dans la littérature, non seulement pour un obstacle ponctuel mais certainement pour d'autres types d'obstacles également.

De nombreuses perspectives s'ouvrent également sur les expériences menées. Une première amélioration consisterait à définir la géométrie des obstacles à l'aide d'un profilomètre dont la précision serait au moins de l'ordre de $10\ \mu\text{m}$. De plus, des mesures de gestes de musiciens pourraient être injectées précisément dans le modèle de corde pincée. Cette étude pourrait être menée à l'aide de méthodes inverses, permettant de déterminer la force appliquée à la corde à partir du déplacement (CHESNE et al., 2006; MONTERRAT, 2015), où bien à l'aide de mesures directes, par exemple en installant une caméra sur l'instrument. Celle-ci devrait être compacte et légère afin de ne pas perturber le musicien. Une fois cette étude menée, on pourrait envisager l'utilisation d'un doigt robotisé (CHADEFAUX et al., 2012) permettant de reproduire une attaque de musicien, afin par exemple de conduire des études paramétriques et de mieux appréhender l'influence du geste du musicien sur la sonorité des instruments.

Enfin, plusieurs extensions peuvent être apportées aux schémas numériques développés. Nous avons en effet considéré dans ce manuscrit un pas spatial constant; un pas spatial variable pourrait être envisagé. Cela permettrait d'affiner le maillage autour de l'obstacle lorsque celui-ci s'y prête, afin d'optimiser les coûts de calcul. Par ailleurs, le modèle de corde peut être généralisé. Dans le modèle présenté, le couplage entre les deux polarisations transversales est restreint et unilatéral. Dans les configurations étudiées dans ce manuscrit, ce couplage s'est montré suffisant pour rendre compte des principaux phénomènes en jeu. Pour d'autres instruments en revanche, les conditions aux limites peuvent impliquer un couplage plus fort pouvant notamment modifier le plan de polarisation de la corde au cours de sa vibration. La description du comportement de la corde devrait alors être complétée, en prenant en compte d'éventuelles sources de non-linéarité qui ne seraient pas liées aux contacts. De plus, la plupart des cordophones possèdent plusieurs cordes; lorsque l'une d'entre elles est excitée, d'autres cordes peuvent vibrer par sympathie. Ce phénomène est particulièrement exploité dans certains instruments d'Asie tels que le sitar; il conviendrait donc de le prendre en compte. Le réalisme des sons produits par rapport aux instruments de musique joués en situation réelle profiterait également d'une prise en compte du geste du musicien, tant au niveau de la main venant pincer ou frapper les cordes, qu'au niveau de la main gauche venant modifier la longueur vibrante de la corde, ou bien modifier des sonorités à travers des techniques de jeu particulières, notamment pour des techniques de slap. Enfin, à des fins de synthèse sonore, il serait pertinent de modéliser les éléments rayonnants des instruments de musique. La validation des modèles par rapport à des travaux analytiques et expérimentaux pourrait alors être complétée par des tests perceptifs.

Par ailleurs, nous avons, dans ce manuscrit, basé notre étude sur une description modale de la corde linéaire; il serait intéressant d'explorer l'utilisation de modes non linéaires pour

décrire le système avec contacts. Les modes non linéaires, tout d'abord employés pour des systèmes impliquant des non-linéarités régulières, sont peu à peu appliqués à des systèmes avec impacts (LAMARQUE et al., 2000). Une analyse modale non linéaire reposant sur la recherche de solutions périodiques avec impacts est par exemple appliquée à un système masses-ressorts dans (THORIN et al., 2015) et à une poutre élastique dans (YOONG et al., 2017). Ces considérations rejoignent celles exprimées précédemment sur la recherche de solutions périodiques pour la corde vibrante.

Les applications possibles des travaux exposés dans ce manuscrit sont diverses. Tout d'abord, l'étude paramétrique que nous avons menée sur la basse électrique donne un aperçu de l'utilisation que l'on pourrait avoir des schémas développés pour l'aide à la facture instrumentale. En particulier, lorsqu'un luthier règle un manche de basse électrique et qu'il observe un phénomène de frise, il doit déterminer la ou les frettes à l'origine des contacts pour les ajuster. Cette tâche délicate pourrait être facilitée par un outil de simulation numérique qui permettrait de visualiser directement les zones concernées. Toutefois, cela nécessiterait une mesure précise du profil des frettes; de plus, nous avons vu que la condition initiale est également partie prenante de l'apparition de contacts, elle devrait donc également être prise en compte en adéquation avec les souhaits du luthier. Le tout doit pouvoir être calculé en un temps acceptable. On peut encore envisager la mise en place d'un outil pédagogique permettant une meilleure appréhension du comportement des cordes entrant en contact avec un obstacle unilatéral lors de leur vibration. Enfin, les modèles de contact exploités sont applicables à de nombreuses situations dans un contexte plus général : les travaux présentés et la démarche associée pourraient être étendus à diverses structures, telles que des caténaires ou des haubans par exemple mais également à des structures se distinguant plus fortement de la corde vibrante, et ainsi s'exporter à d'autres domaines d'application.

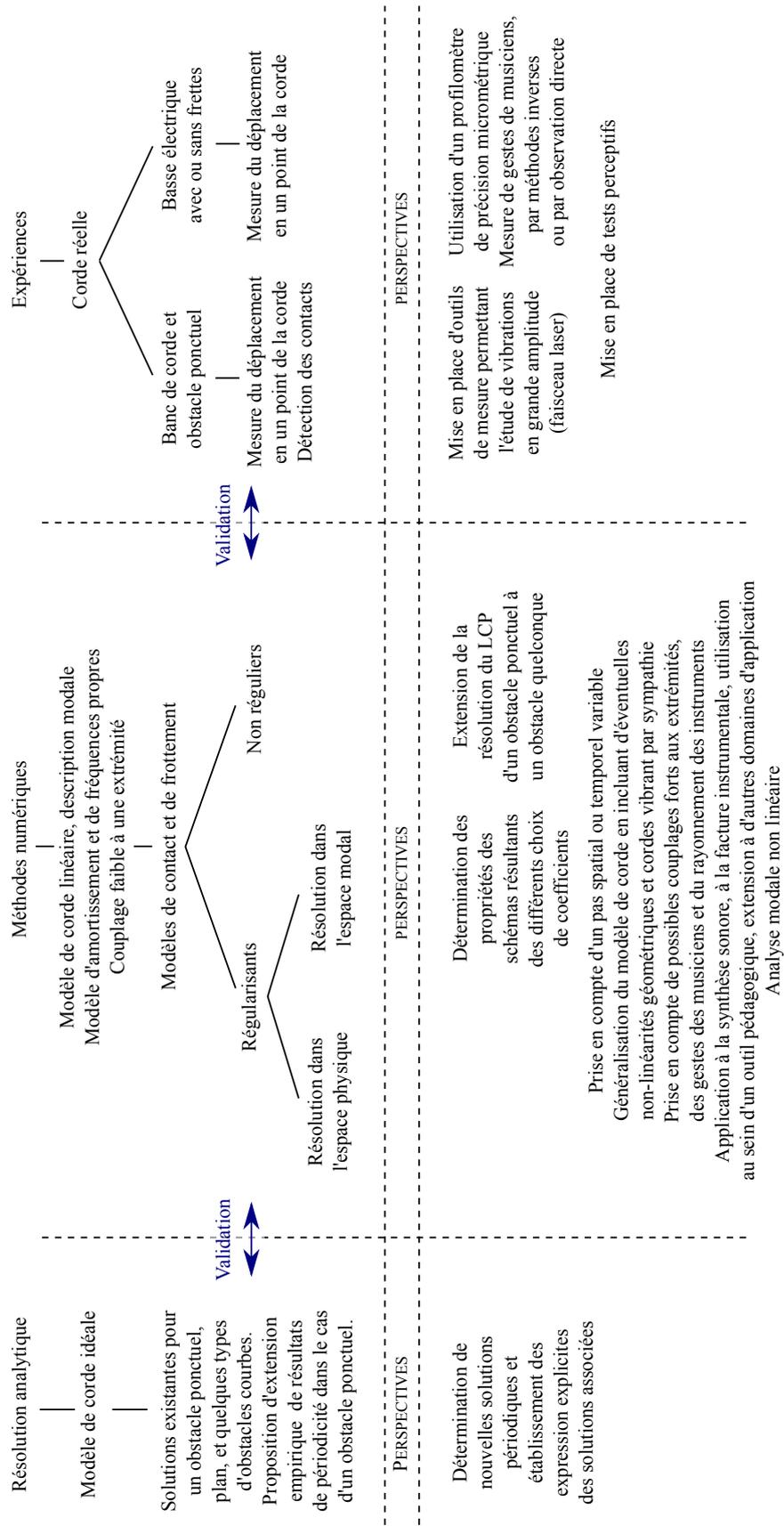


FIGURE 5.24 – Synthèse des travaux menés et perspectives.

Contributions

Articles de revue

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont fait l'objet de la publication d'un article au *Journal of Sound and Vibration* (ISSANCHOU et al., 2017a), une seconde publication à *Applied Acoustics* est en cours d'examen (ISSANCHOU et al., 2018). Un projet de contribution est par ailleurs à l'étude pour soumettre à publication les travaux concernant la méthode non régulière.

Articles de conférence

Les études menées ont été présentées lors de conférences françaises (ISSANCHOU et al., 2015; ISSANCHOU et al., 2016b; ISSANCHOU et al., 2017b) et internationale (ISSANCHOU et al., 2016a), pour lesquelles des actes ont été publiés.

Présentations

Enfin, diverses présentations n'ayant pas fait l'objet de publications ont permis d'échanger sur les thématiques abordées dans ce manuscrit, à travers des posters aux Journées Jeunes Chercheurs en vibrations, Acoustique et Bruit (JJCAB) 2015 et aux Journées Jeunes Chercheurs en Acoustique, Audition et Signal (JJCAAS) 2016, ainsi qu'une présentation aux journées du groupe de recherche DYNOLIN 2016¹ et à un symposium international (ISSANCHOU et al., 2017c).

1. <http://perso.ensta-paristech.fr/~touze/dynolin2016.html>

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

Quelques instruments de musique impliquant des contacts corde/obstacle

Sur de nombreux instruments à cordes (cordophones) tels que la guitare ou le violon, la longueur vibrante des cordes est déterminée par les positions du sillet et du chevalet. Ce dernier a pour rôle de transmettre la vibration des cordes au corps de l'instrument, afin que le son rayonne suffisamment pour être audible. Les extrémités des cordes peuvent être considérées comme ponctuelles, et lorsque la corde est excitée, elle entre en vibration sans rencontrer d'obstacle, hormis le mécanisme excitateur ou d'éventuels doigts venant définir une nouvelle extrémité de la corde en se substituant au sillet. Sur certains cordophones cependant, les cordes rencontrent un obstacle lors de leur vibration. C'est le cas par exemple des instruments pour lesquels le chevalet n'est pas ponctuel mais présente une certaine surface (comme le sitar, voir la section A.1.1). Nous verrons que de nombreuses autres situations peuvent également être rencontrées. Ces configurations donnent aux instruments un timbre particulier qui les caractérise : l'obstacle à la vibration est un élément clef, essentiel de l'instrument.

Dans cette annexe, nous proposons une description succincte de certains de ces instruments, à travers lesquels nous souhaitons donner un aperçu de la diversité des cordophones dans lesquels interviennent des contacts corde/obstacle. Pour chacun de ces instruments, nous présentons ainsi, dans une certaine mesure, les caractéristiques principales, les matériaux utilisés, les positions de jeu usuelles ainsi que des travaux scientifiques menés sur l'instrument. Cette description n'a pas vocation à être exhaustive. Nous choisissons ici de présenter des instruments où l'obstacle est considéré comme fixe ; nous ne considérons donc pas les instruments tels que la trompette marine ou le berimbau. Nous commençons par décrire les instruments dits à chevalet « plat » à travers quelques exemples illustrant la famille diversifiée qu'ils constituent, puis nous présentons des cordophones pour lesquels l'obstacle se situe sur une autre partie de l'instrument, du sillet aux harpions en passant par le manche.

A.1 Les instruments à chevalet « plat » : contact corde/chevalet

Un certain nombre d'instruments de musique sont munis d'un chevalet présentant une surface caractérisée par son rayon de courbure et son orientation (BERTRAND, 1992). Celui-ci constitue un obstacle à la vibration de la corde et enrichit le son de l'instrument. Deux positions en particulier sont utilisées, à savoir la position fermée (*bhand jawari* ou *band jawari*), et la position ouverte (*kula jawari* en hindi, ou *khula jawari* (WEISSER et al., 2013)). Elles peuvent être décrites de la manière suivante (BERTRAND, 1992) : dans la position fermée, le chevalet a une faible courbure et il est orienté légèrement vers l'arrière (voir la figure A.1(a)); dans la position ouverte au contraire, la courbure est plus grande et l'orientation proche de l'horizontale (voir la figure A.1(b)). Une position intermédiaire, moins utilisée, est la position *gol* (WEISSER et al., 2013). En hindi (langue officielle en Inde), *jawari* désigne le réglage du chevalet (BERTRAND, 1992).



FIGURE A.1 – Schéma d'une corde en présence d'un chevalet courbe en position (a) fermée (b) ouverte.
Issu de : (BERTRAND, 1992)

L'ouverture du chevalet joue un rôle essentiel pour le son final de l'instrument. Il est d'autant plus difficile de la régler que pour les instruments frettés, appuyer sur une frette abaisse la corde, ce qui « ferme » le chevalet (BERTRAND, 1992). L'influence de l'ouverture du chevalet de sitar (voir la section A.1.1) sur le son a été étudiée dans (WEISSER et al., 2013) par le biais de discours de musiciens et de descripteurs de timbre spécifiques.

Sur des instruments comportant un chevalet courbe sans aménagement supplémentaire tels que le sitar, on observe un effet de seuil avec l'amplitude de l'excitation de la corde : en deçà, l'effet du chevalet est moindre voire non audible. Ainsi, pour un même point de pincement plus près du chevalet que du sillet, ce qui est le cas en pratique, si l'on pince la corde de bas en haut (de l'instrument vers l'extérieur), on peut être en dessous du seuil, tandis qu'en la pinçant de haut en bas avec la même force, on peut être au-dessus du seuil. Cela est dû à l'asymétrie du mouvement de la corde : au niveau du chevalet, la corde descend plus dans le second cas. On observe d'ailleurs que la *rudra vina bin* par exemple (voir la section A.1.2) est jouée en pinçant la corde de haut en bas (les deux polarisations transversales sont excitées).

Cet effet de seuil n'est pas présent sur la tampoura, instrument pour lequel un fil *juari* est placé entre le chevalet courbe et chaque corde (voir la section A.1.3) : sous réserve d'un réglage adéquat, le son est fortement enrichi en hautes fréquences même pour de très faibles amplitudes. On pourrait alors envisager d'installer un fil *juari* sur des instruments tels que la *rudra vina bin* par exemple, de même que sur la tampoura, ce qui permettrait d'obtenir des sons très riches même à faible amplitude. Cependant, si la tampoura est jouée sans doigté, la *rudra vina bin* est au contraire frettée et les doigts qui se placent entre les frettes peuvent tirer les cordes latéralement de manière très importante (la note peut augmenter d'une quinte). Un tel déplacement de la corde ne permettrait pas le maintien du fil *juari* dans sa position initiale, or son effet est très sensible à sa position et le son pourrait s'appauvrir considérablement.



FIGURE A.2 – Déesse Sarasvati jouant de l'*ekatantri vina*. Issu de : (BRUGUIÈRE)

Notons qu'il a existé un instrument monocorde, nommé *ekatantri vina* (voir la figure A.2), où la main gauche du musicien venait changer la longueur vibrante et où le fil *juari* était tout de même présent. Cependant la main gauche agissait non pas en tirant sur la corde mais simplement en faisant glisser un bâtonnet sur la corde, la plaquant de ce fait sur le manche. La corde n'était donc *a priori* pas soumise à de fortes sollicitations comme dans le cas de la *rudra vina*.

A.1.1 Le sitar

Le sitar est un instrument de la famille des luths à manche long (BERTRAND, 1992) très présent dans la musique classique de certaines régions d'Asie du Sud (GROVE). Il a été popularisé en particulier par Ravi Shankar (1920-2012). Un sitar et des chevalets de sitar sont présentés sur les figures A.3(b) et A.3(c).

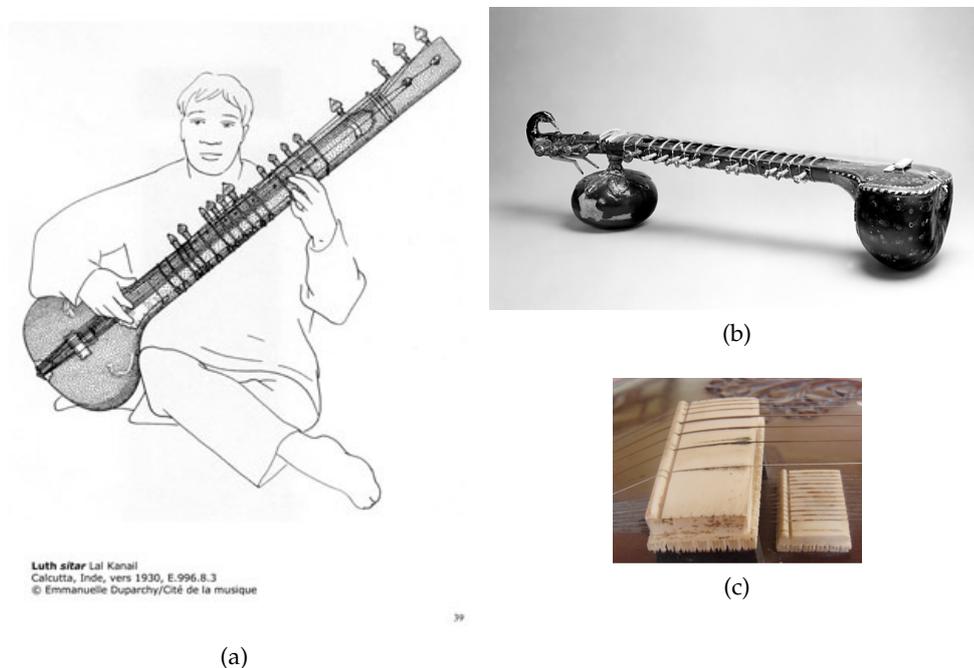


FIGURE A.3 – (a) Musicien jouant du sitar. *Issu de* : (PHILHARMONIE DE PARIS) (b) Sitar (avec résonateur supérieur). *Issu de* : (METROPOLITAN MUSEUM OF ART) (c) Chevalets d'un sitar. *Issu de* : (WEISSER *et al.*, 2013)

Il existe différents types de sitars, préférentiellement solistes ou accompagnateurs. Pour les modèles les plus courants en musique de concert hindoustanie, on compte en général cinq cordes mélodiques, deux cordes dites de bourdon ou de ponctuation (WEISSER *et al.*, 2013; GROVE; MONTAGU), désignées par le terme *chikari* (BERTRAND, 1992; SINGH, 2013) ou *cikari* (WEISSER *et al.*, 2013; GROVE), ainsi qu'une douzaine de cordes sympathiques (*tarab* (BERTRAND, 1992), *taraf* (WEISSER *et al.*, 2013; WEISSER *et al.*, 2012a) ou encore *tarb* (SINGH, 2013)).

Deux chevalets courbes sont présents sur l'instrument, le principal concerne les cordes mélodiques et de ponctuation tandis qu'un chevalet secondaire est consacré aux cordes sympathiques (GROVE). Le choix de l'orientation de ces chevalets (plus ou moins ouverts ou fermés) revient au musicien (WEISSER *et al.*, 2013), et nécessite un ajustement tout au long de la vie de l'instrument (GROVE).

Il existe actuellement deux principaux types de sitars, très similaires mais dont les cordes principales diffèrent, en nombre et en fréquence. Ainsi, le *kharaj pancham sitar* a généralement

cinq cordes mélodiques et deux cordes de ponctuation, tandis que le *gandhar pancham sitar* a généralement quatre cordes mélodiques et deux cordes de ponctuation. De plus, le *kharaj pancham sitar* peut avoir un résonateur en haut du manche (SINGH, 2013; INDIA INSTRUMENTS). Les 20 frettes sont courbes et leur position peut être ajustée d'une performance à l'autre (SINGH, 2013; GROVE).

La caisse de résonance est souvent faite en citrouille, la table d'harmonie et le manche en teck. Les chevalets peuvent être en os ou en plastique, les frettes sont métalliques. Pour un *gandhar pancham sitar*, un jeu courant de cordes en comprend avec des diamètres d'entre 0.22 et 0.85 mm, faites en acier, cuivre, bronze ou laiton selon les cordes (INDIA INSTRUMENTS; GROVE).

Une position de jeu est présentée sur la figure A.3(a). La main droite vient pincer les cordes à l'aide d'un plectre métallique (appelé *mizrab*) (A&E HYDROACOUSTICS LAB; GROVE), tandis que les doigts de la main gauche se posent au niveau des frettes pour contrôler la note. Une fois positionné, le doigt peut tirer la corde sur un côté pour faire varier finement la fréquence de la note.

Le mouvement d'une corde de sitar a été étudié par C. V. Raman au début du 20^{ème} siècle, qui a pu observer une similitude avec le mouvement de Helmholtz que l'on observe habituellement sur des instruments à cordes frottées (FLETCHER et al., 1998). Le sitar a également été étudié dans (SIDDIQ, 2012), où l'auteur montre la présence de formants descendants de fréquences relativement hautes, et met en évidence le transfert d'énergie qui a lieu entre les différents modes. Il montre l'importance de la dispersion, en plus de la présence du chevalet courbe, pour l'apparition de ces phénomènes complexes. De plus, il observe que les points de réjection habituellement observés pour les cordes pincées (loi de Young-Helmholtz) ne sont pas présents dans le cas du sitar, ce qui a également été observé plus tôt par C. V. Raman dans le cas de la *tampoura* ou de la *vina* (RAMAN, 1921). Des travaux sur l'influence des cordes sympathiques sont l'objet de (DEMOUCRON et al., 2012; WEISSER et al., 2012a), et l'usage des cordes *chikari* de (SINGH, 2013). L'action du chevalet arrondi sur la corde a quant à elle été étudiée dans (BURRIDGE et al., 1982; SIDDIQ, 2012; VYASARAYANI et al., 2009).

A.1.2 La *vina*

Nous présentons ici les *rudra vina* et *sarasvati vina*, illustrées par la figure A.4.

La *rudra vina*, également appelée *vina* du Nord (BERTRAND, 1992), *bin*, cithare sur tube ou encore cithare sur bâton (BERTRAND, 1992; CITÉ DE LA MUSIQUE), est un instrument très utilisé dans la musique classique du nord de l'Inde. Il est composé de cordes disposées sur un tube en bois ou bambou et de deux résonateurs en calèche fixés sous le tube (BERTRAND, 1992). Il atteint une longueur d'environ 122 cm (DICK et al.). Son chevalet est en os, bois de cerf ou ivoire (BRUGUIÈRE; DICK), placé en position fermée (RAO). Sa géométrie peut varier de manière significative d'un instrument à l'autre. La *rudra vina* compte quatre corde mélodiques, deux ou trois cordes rythmiques et un bourdon, disposés sur des chevalets arrondis également (BRUGUIÈRE; DICK). Cet instrument est présenté sur la figure A.4(c), joué par un musicien sur la figure A.4(a) et un détail de son chevalet est montré sur la figure A.4(d). Si cet instrument se joue assis de nos jours, il était, quelques siècles plus tôt, plus petit, et se portait sur l'épaule. Les cordes peuvent être en acier, cuivre, laiton ou bronze, et leur diamètre peut varier sensiblement.

Les cordes sont pincées par la main droite à l'aide de la pulpe du doigt, d'un ongle ou d'un ongle en métal, tandis que les doigts de la main gauche se placent entre les frettes pour modifier la longueur vibrante de la corde. De plus, pour une même position sur les frettes, on peut atteindre une quinte au-dessus de la note en tirant latéralement sur la corde (parallèlement aux frettes) (BRUGUIÈRE).

Le *sarasvati vina* (ou *vina* du Sud) fait, de même que le sitar, partie de la famille des luths à manche long. C'est le principal cordophone de la musique carnatique. Il est en bois et comporte un résonateur secondaire en calèche ou papier-mâché (DICK et al.). Cet instrument comporte



(a)



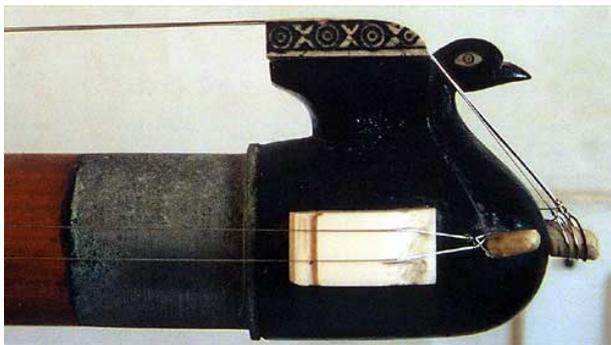
(b)



(c)



(e)



(d)



(f)

FIGURE A.4 – (a) Musicien jouant de la *rudra vina*. Issu de : (IROM) (b) Musicienne jouant de la *sarasvati vina*. Issu de : (PHILHARMONIE DE PARIS) (c) *Rudra vina*. Issu de : (BRUGUIÈRE) (e) *Sarasvati vina*. Issu de : (MUSEUM BASSERMANNHAUS FÜR MUSIK UND KUNST) (d) Chevalet d'une *rudra vina*. Issu de : (BRUGUIÈRE) (f) Chevalet d'une *sarasvati vina*. Issu de : (UNIVERSITY OF SOUTH DAKOTA)

quatre cordes mélodiques et trois cordes de bourdon rythmique (BERTRAND, 1992) placées sur deux parties distinctes du chevalet, comme on peut le voir sur la figure A.4(f). Ce dernier est en position ouverte (RAO). Les cordes sont excitées à l'aide des ongles de la main droite (DICK et al.).

A.1.3 La tampoura

La tampoura (voir la figure A.5(b)) appartient à la famille des luths à manche long (DICK). C'est un instrument d'accompagnement caractéristique de l'Asie du Sud, aussi appelé instrument bourdon (MIM; DICK). Il est muni de cordes métalliques jouées à vide (WEISSER et al., 2013). Par conséquent, il ne possède pas de frettes. La plupart du temps, ces cordes sont au nombre de quatre, toutefois une tampoura peut également en comporter cinq ou six (INDIA INSTRUMENTS).

Le chevalet d'une tampoura (voir la figure A.5(c)) est en position ouverte, et entre chaque corde et le chevalet se trouve un fil appelé *juari* ou *jiva* (BERTRAND, 1992), généralement en soie

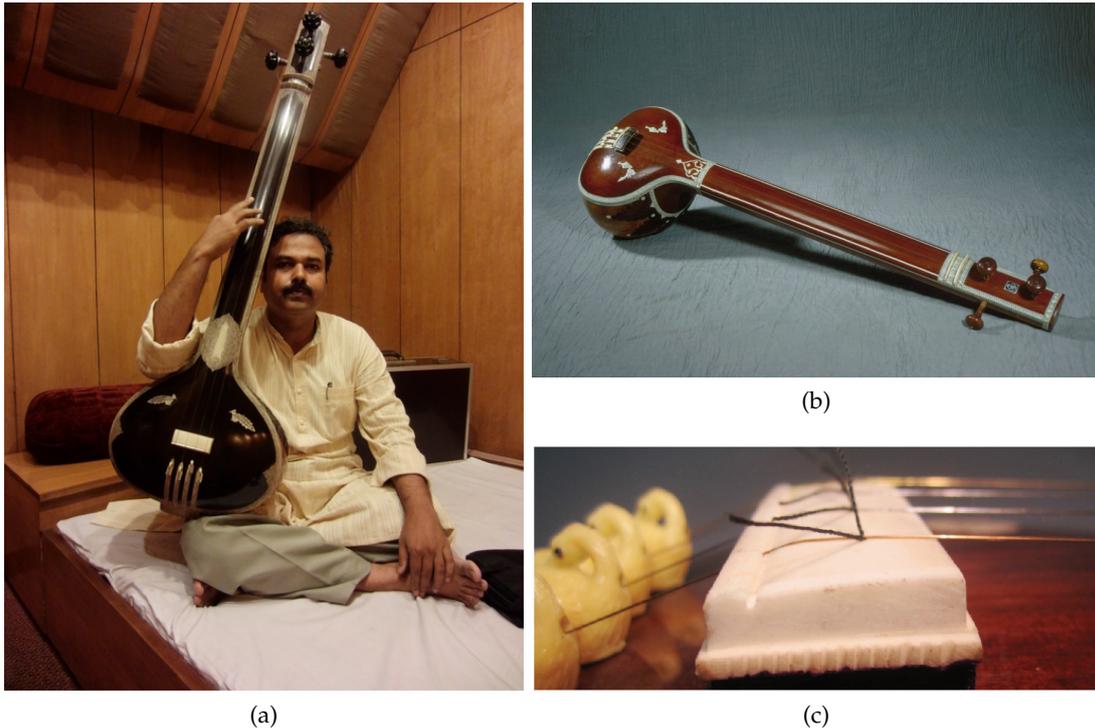


FIGURE A.5 – (a) Musicien tenant une tampoura . Issu de : (MIM) (b) Tampoura. Issu de : (GRINNELL COLLEGE)(c) Chevalet d’une tampoura. Issu de : (VAN WALSTIJN et al., 2014)

ou en coton (VAN WALSTIJN et al., 2014). Il fait l’objet d’un réglage soigneux, et permet d’obtenir la sonorité si caractéristique de l’instrument. Il faut ainsi qu’au repos, la corde affleure le chevalet plat puis s’appuie sur le fil *juari*. Cette position correspond à une distance d’environ 5 mm pour environ 1 m de corde (VALETTE et al., 1991). Du fait de la présence de ce fil, la condition à cette extrémité de la corde est soit donnée par le fil, soit par le chevalet courbe. On parle de chevalet double (VALETTE et al., 1993).

La tampoura est en bois, avec un résonateur issu d’une calebasse et complété de bois (DICK). Le chevalet peut être en ivoire, en os ou en bois de cerf (BHATTACHARYYA et al., 1956; DICK). Les dimensions de l’instrument ainsi que la manière de l’accorder varient selon le type de tampoura. Il en existe trois sortes : les « mâles », les « femelles » et les « instrumentaux », ils accompagnent respectivement une voix masculine, féminine ou un autre instrument (par exemple un sitar) (MIM). Les tampouras mâles ont une longueur totale de 140 à 150 cm, les femelles de 120 à 130 cm, et les instrumentaux de 95 à 115 cm. Ces derniers ont une caisse de résonance en bois avec beaucoup moins de profondeur que les autres (INDIA INSTRUMENTS). Les cordes sont en métal (acier, cuivre, laiton ou bronze) (DICK).

La figure A.5(a) présente une manière possible de tenir l’instrument, celui-ci pouvant être positionné verticalement ou horizontalement (DICK). Les cordes sont jouées avec les doigts, sans plectre (BHATTACHARYYA et al., 1956) et de manière généralement douce, suivant un rythme régulier (DICK).

La tampoura a suscité la curiosité d’un certain nombre de chercheurs à cause de la particularité de son chevalet et du son résultant, celui-ci étant notamment caractérisé par un formant descendant correspondant à une zone spectrale renforcée qui décroît en fréquence. Mentionné dans (FLETCHER et al., 1998), cet instrument est notamment l’objet des travaux présentés dans (VALETTE et al., 1991; VALETTE et al., 1993; VAN WALSTIJN et al., 2014; CHATZIOANNOU et al., 2015; ISSANCHOU et al., 2017a).

A.1.4 Le sarangi

Le *sarangi* (voir la figure A.6b) est un instrument d'Asie du Sud à cordes frottées accompagnant chants et/ou danses en Inde du Nord, au Pakistan et au Rajasthan (COCHRANE). Sans frette, il est muni de trois cordes principales et d'environ 35 cordes sympathiques (SORRELL). Certaines de ces cordes sympathiques reposent sur deux chevalets courbes au niveau de la tête de l'instrument, près des chevilles (ces chevalets font office de sillet). En général, ces cordes sont au nombre de 11, 5 sur l'un des deux chevalets plats et 6 sur l'autre.

Sur la figure A.6(c), on peut observer les chevalets arrondis pour certaines cordes, ils sont ici munis de fils, comme c'est le cas sur la *tampoura* (voir la section A.1.3).

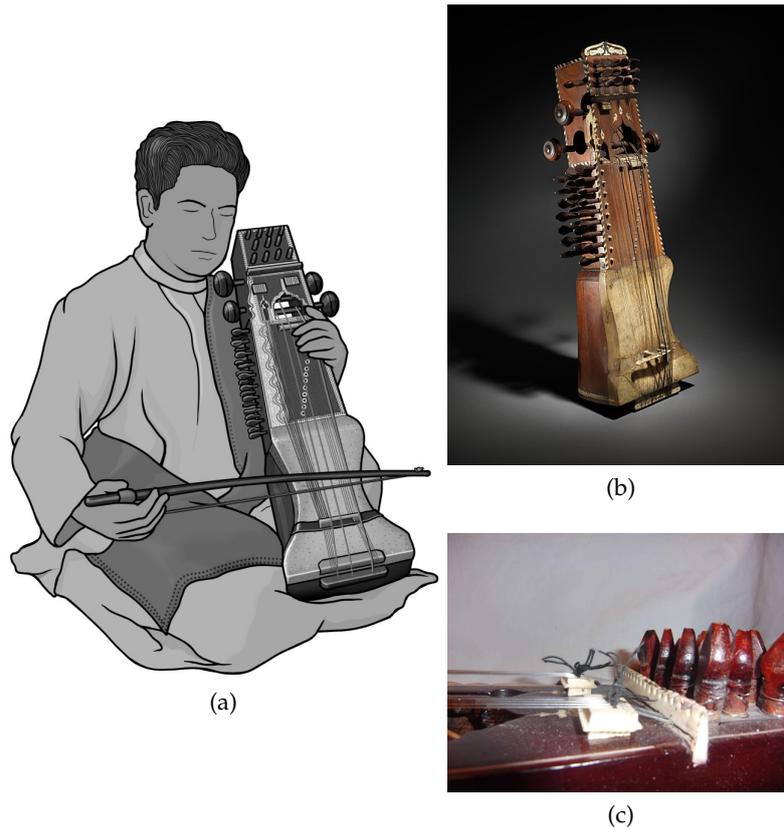


FIGURE A.6 – (a) Musicien jouant du sarangi. Issu de : (IROM) (b) Sarangi. Issu de : (METROPOLITAN MUSEUM OF ART) (c) Sarangi, détail des chevalets courbes. Issu de : (A&E HYDROACOUSTICS LAB)

L'instrument fait entre 65 et 70 cm et pèse entre 2 et 3 kg. Le corps du *sarangi* est en bois, en partie couvert d'une peau de chèvre. Les trois cordes principales sont généralement en boyau tandis que les autres cordes sont en métal (acier ou laiton) (INDIA INSTRUMENTS; SORRELL).

La figure A.6(a) présente la tenue de l'instrument par le musicien, assis et jambes croisées. De sa main gauche, il modifie la longueur de la corde vibrante pour faire varier les notes en posant l'ongle d'un doigt (index, majeur ou annulaire) contre la corde, de côté (SORRELL). L'archet est tenu par la main droite.

L'importance des cordes sympathiques du *sarangi* et du *sitar* est étudiée dans (WEISSER et al., 2012a), où la variabilité de la contribution de ces cordes, en fonction du réglage propre à chaque instrument et des notes jouées, est mise en exergue.

A.1.5 Guitare électrique

Nous considérons ici les guitares électriques à corps plein. Sur le manche se trouve une touche généralement munie de frettes délimitant les différentes notes. Le corps étant plein, il rayonne peu et n'est pas le vecteur principal du son. La vibration des cordes est en fait captée par des

microphones électromagnétiques et un système d'amplification permet ensuite de traiter les données reçues, par exemple pour émettre des sons par le biais d'une enceinte.

Une guitare électrique peut être jouée en soliste ou en accompagnement. Elle a en général six cordes accordées selon mi-la-ré-sol-si-mi de la plus grave à la plus aigüe, en partant d'un mi à environ 82 Hz, mais peut en comporter davantage. Les cordes sont souvent en acier, et les plus graves peuvent être filées avec du nickel par exemple (KING CORDES). Le filet est la plupart du temps rond mais peut également être demi-rond ou plat.

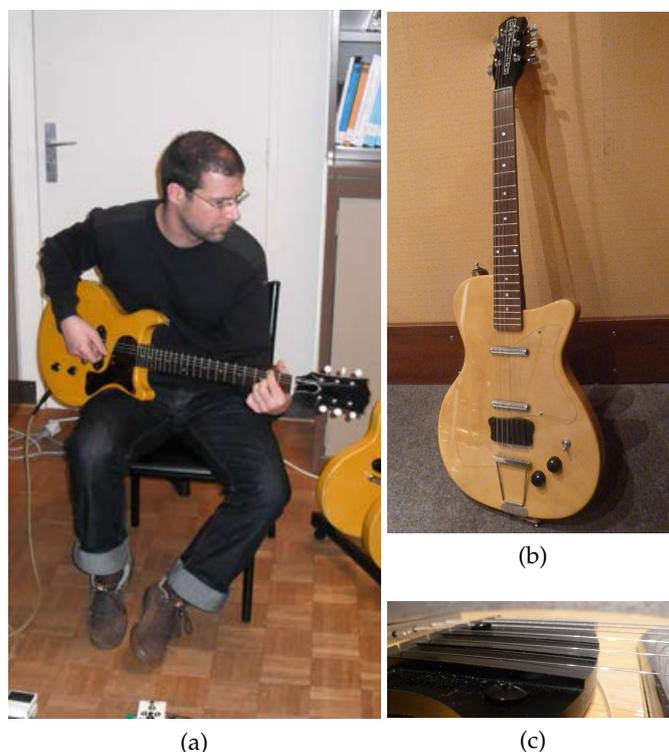


FIGURE A.7 – (a) Musicien jouant de la guitare électrique. Issu de : (PATÉ, 2014) (b) Guitare électrique avec un *buzz bridge*. (c) *Buzz bridge* sur une guitare électrique.

Bien que cette pratique soit marginale, la guitare peut être munie d'un chevalet courbe (*buzz bridge* en anglais), ce qui a pour effet de rapprocher la sonorité de celle d'un sitar. Un tel instrument est présenté sur la figure A.7(b), le *buzz bridge* étant détaillé sur la figure A.7(c). Ce type de chevalet nécessite la mise en place d'un cordier spécifique. Il existe cependant des pontets ayant la même fonction et s'installant directement sur certains modèles de guitares (*Telecaster*), comme les chevalets flottants classiques.

Le manche d'une guitare électrique n'est pas droit : il épouse l'enveloppe du mouvement de la corde et pour cela, il est convexe, avec un rayon de courbure augmentant lorsque l'on se rapproche du corps de l'instrument. Son ajustement permet d'une part d'éviter que l'appui d'un doigt ne crée trop de tension supplémentaire, ce qui fausserait la note, et d'autre part d'éviter le phénomène de frise, qui correspond à des contacts corde/frette indésirables.

Une guitare électrique mesure autour de 1 m, avec généralement une longueur vibrante de corde entre 60 et 65 cm. Elle est généralement en bois. La table peut ainsi être en frêne, aulne ou acajou, et le manche en érable ou acajou (PATÉ, 2014).

La figure A.7(a) présente un musicien jouant d'une guitare électrique. Les cordes sont pincées, par les doigts de la main droite ou à l'aide d'un plectre, petit triangle généralement en plastique.

Le comportement vibratoire de la guitare électrique munie d'un chevalet classique et l'influence des matériaux utilisés ont notamment été étudiés dans (FLEISCHER et al., 1998 ; PATÉ, 2014).

A.1.6 La bagana éthiopienne

La bagana (ou begena, beganna) éthiopienne (voir la figure A.8(b)) est un instrument à dix cordes, utilisé en soliste ou accompagnement de chants religieux pour la prière et la méditation (WEISSER, 2006 ; WEISSER et al., 2012b ; LAH et al.). Son chevalet est plat, sans courbure (BESNAI-NOU et al., 2009). Un morceau de cuir est intercalé entre ce chevalet et chacune des cordes (LAH et al.) (voir la figure A.8(c)). Ce dispositif rappelle celui présent sur une tampoura (voir la section A.1.3).

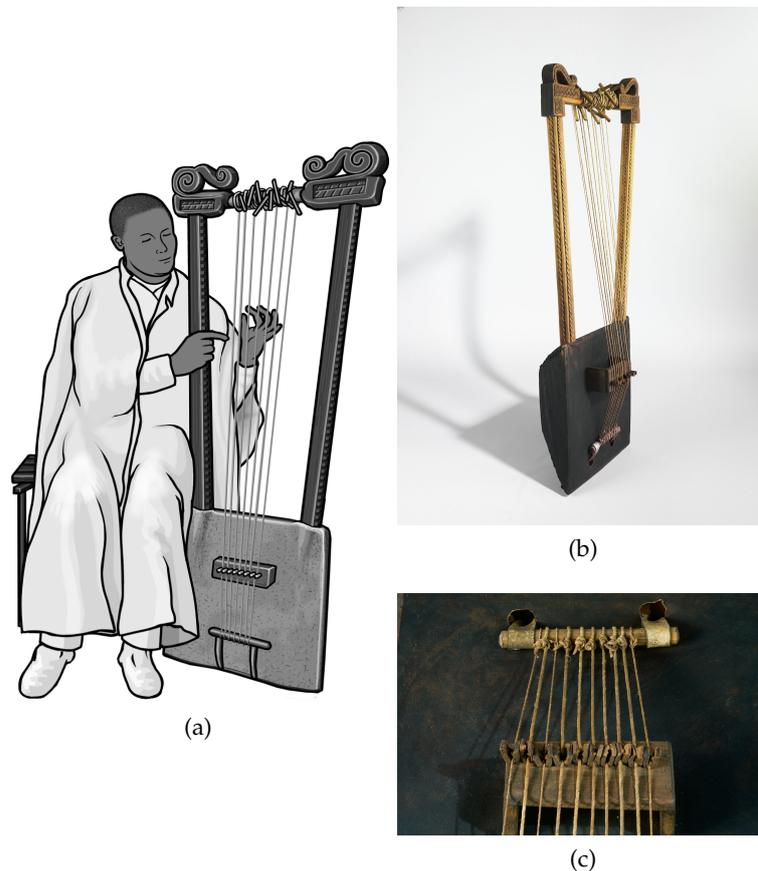


FIGURE A.8 – (a) Musicien jouant de la bagana. *Issu de : (WEISSER, 2006)* (b) Bagana. *Issu de : (PHILHARMONIE DE PARIS, COLLECTIONS)* (c) Chevalet de bagana. *Issu de : (PHILHARMONIE DE PARIS, COLLECTIONS)*

L'instrument mesure environ 120 cm (LAH et al.), avec une caisse d'une largeur d'environ 40 cm (PHILHARMONIE DE PARIS, COLLECTIONS).

La caisse de résonance est en bois, souvent recouverte par une table d'harmonie en peau d'animal. Le chevalet est en bois et les cordes sont en boyau (WEISSER et al., 2012b ; PHILHARMONIE DE PARIS, COLLECTIONS). Celles-ci sont pincées avec la pulpe des doigts de la main gauche, tandis que la main droite maintient l'instrument (voir la figure A.8(a)).

La bagana a été étudiée en particulier dans (WEISSER, 2006 ; WEISSER et al., 2012b).

A.2 Du manche aux harpions : les obstacles à la vibration de la corde, hors chevalet

Dans cette section, nous présentons divers instruments pour lesquels des contacts peuvent intervenir entre une ou plusieurs cordes vibrantes et un obstacle qui ne soit pas au niveau du chevalet. Les exemples exposés permettent d'illustrer la diversité des éléments des instruments

qui peuvent être employés pour enrichir les sons produits par la présence de contacts avec les cordes.

A.2.1 La contrebasse

La contrebasse (voir la figure A.9(b)) est un instrument à cordes frottées, non fretté. Principalement utilisée dans la musique occidentale, elle comporte en général quatre cordes accordées selon mi-la-ré-sol de la plus grave à la plus l'aigüe, en partant d'un mi à environ 41 Hz. Elle peut aussi avoir cinq cordes (ROSSING, 2010; SLATFORD et al.).

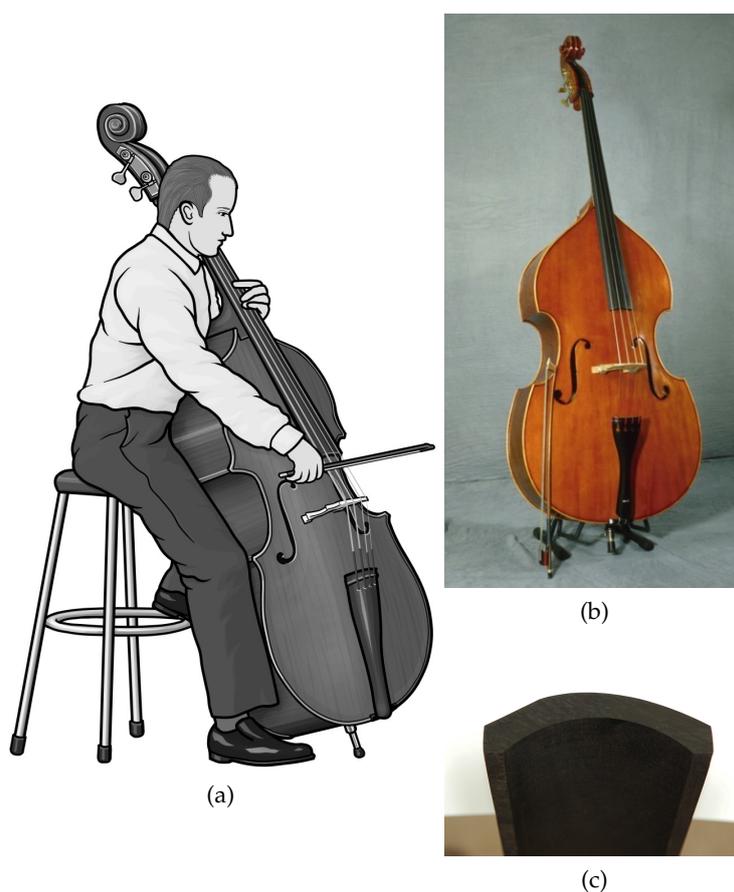


FIGURE A.9 – (a) Musicien jouant de la contrebasse. *Issu de :* (IROM) (b) Contrebasse. *Issu de :* (GRINNELL COLLEGE) (c) Contrebasse, détail de la touche (extrémité proche du chevalet, vue par-dessous). *Issu de :* (BEARE)

La taille d'une contrebasse peut varier considérablement, toutefois une taille courante correspond à un corps de longueur 115 cm et une hauteur totale de 180 cm environ (MONTAGU). La caisse de résonance est en bois, la touche généralement en ébène.

Les cordes sont la plupart du temps filées, avec un filet plat. L'âme peut être en acier, nylon ou boyau par exemple, et le filet peut être en nickel, argent, acier chromé ou encore en aluminium. Les cordes peuvent aussi être intégralement en boyau. Les diamètres varient entre 1 et 5 mm approximativement (MAISON DE LA CORDE; KING CORDES; SLATFORD et al.).

La figure A.9(a) présente la tenue d'une contrebasse. Le musicien joue généralement debout ou assis sur une chaise haute. La contrebasse peut être jouée à l'archet ou en pizzicato (les cordes sont pincées), tandis que la main gauche se pose sur la touche pour ajuster la note jouée. La contrebasse est particulièrement utilisée en accompagnement dans les orchestres ainsi que dans les ensembles de jazz, mais elle peut également avoir un rôle de soliste (SLATFORD et al.). Le jeu en pizzicato est particulièrement employé en jazz et musique populaire (MONTAGU). Lorsqu'une corde est

pincée avec suffisamment d'amplitude, la corde peut venir heurter la touche, ce qui confère à l'instrument une sonorité particulière recherchée.

Des travaux sur la contrebasse portant notamment sur ses modes de vibration et sa mobilité au chevalet sont présentés dans (ASKENFELT, 2010; FLETCHER et al., 1998).

A.2.2 La guitare basse électrique

Une basse électrique à corps plein (voir la figure A.10(a)) a une structure semblable à celle des guitares électriques (voir la section A.1.5). Cet instrument, généralement d'accompagnement, a vu sa forme actuelle émerger aux États-Unis dans les années 1950 (BACON et al.). Il a généralement quatre cordes accordées selon mi-la-ré-sol de la plus grave à la plus aigüe, comme la contrebasse (voir la section A.2.1), mais peut en avoir davantage.

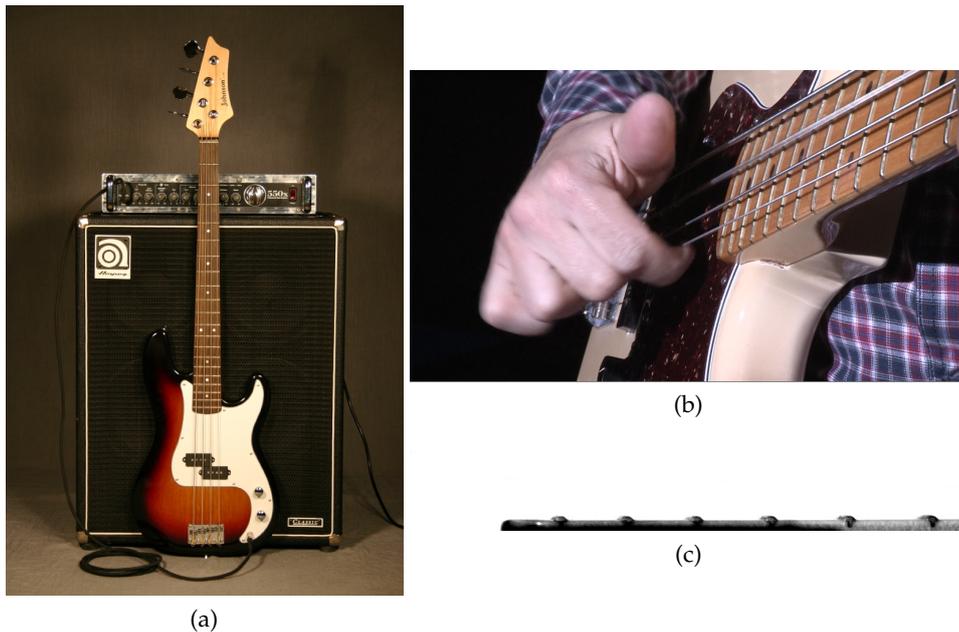


FIGURE A.10 – (a) Basse électrique et système d'amplification. *Issu de :* (GRINNELL COLLEGE) (b) Basse électrique, attaque en « pop » en cours. (c) Détail des dernières frettes du manche.

Un bassiste peut jouer debout ou assis. Les cordes de la basse électrique sont pincées, à travers diverses techniques de jeu. Nous avons mentionné le phénomène de frise dans la section A.1.5, indésirable et résultant d'un contact corde/frettes (cordes/touche pour une basse *fretless*) involontaire. Cette problématique est également présente sur la basse électrique. Cependant, certains modes de jeu, notamment en jazz, tirent profit des contacts corde/manche à travers des modes de jeu tels que le « slap » et le « pop », le premier consistant à frapper une corde (généralement une corde grave) fortement avec le pouce pour provoquer le contact, et le second à tirer une corde (généralement une corde aigüe) avec l'index par exemple (voir la figure A.10(b)), avec suffisamment d'amplitude pour provoquer un contact une fois relâchée. Ces deux mouvements sont parfois regroupés sous le nom de « slapping » (BACON et al.).

Il existe de nombreux modèles de basses électriques, qui varient par la forme, le nombre de cordes, les cordes elles-mêmes, les matériaux etc. Les cordes sont généralement faites en acier (éventuellement inoxydable) et nickel. Elles peuvent être filées rond, demi-rond et plat, et sont parfois en acier non filées. Pour les cordes les plus épaisses, il peut y avoir plusieurs filets superposés. Les diamètres sont variable; un exemple de jeu standard correspond à des diamètres de corde de 1.1 à 2.7 mm environ, avec par exemple une âme en acier et un filet en nickel.

Le comportement linéaire de la basse électrique a été étudié dans (FLEISCHER, 2005), et le contact corde/frette dans (ISSANCHOU et al., 2017b; KRAMER et al., 2017; ISSANCHOU et al., 2018).

A.2.3 Le shamisen

Le *shamisen* (aussi appelé *samisen* ou *sangen* (GROVE)) est un luth japonais à trois cordes mesurant autour d'un mètre, constitué d'un long manche sans frette et d'une caisse tous deux en bois (voir la figure A.11).

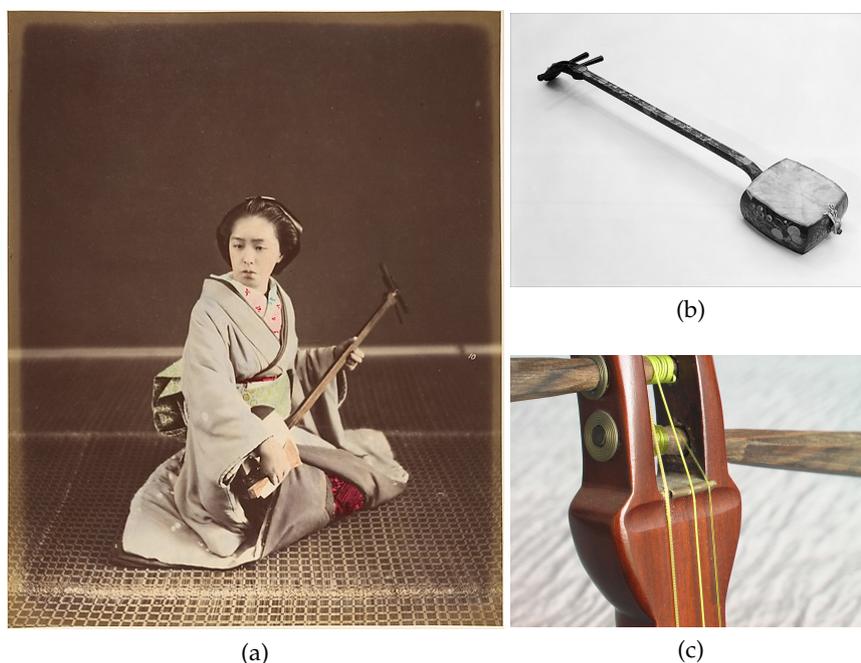


FIGURE A.11 – (a) Musicienne jouant du *shamisen*. Issu de : (METROPOLITAN MUSEUM OF ART) (b) *Shamisen*. Issu de : (METROPOLITAN MUSEUM OF ART) (c) Détail du manche du *shamisen*. Issu de : (GRINNELL COLLEGE)

La caisse est recouverte à l'avant et à l'arrière par de la peau de chat ou de chien, et les cordes sont généralement jouées à l'aide d'un large plectre de bois ou d'ivoire, parfois avec les ongles (YOSHIKAWA, 2010; MONTAGU).

La corde la plus grave est mise en présence d'un mécanisme particulier, qui donne un son spécifique au *shamisen*. En effet, sur le manche, juste à côté du sillet, on observe un creux (une « vallée ») suivi d'une pointe (une « montagne »), le reste du manche étant plus classique (ARISAWA, 2011; YOSHIKAWA, 2010). L'obstacle ainsi offert à la corde est de type ponctuel (YOSHIKAWA, 2010).

Cet instrument accompagne généralement un chanteur mais peut également intervenir dans une musique instrumentale (GROVE).

A.2.4 Le biwa

Le *biwa* désigne un instrument japonais, dont il existe divers types selon les dimensions, le plectre utilisé, les cordes ou encore le nombre de frettes. Ils sont en bois et comportent au moins quatre frettes ainsi que quatre ou cinq cordes en soie (DE FERRANTI). Celles-ci sont généralement accordées en fonction de la voix qu'elles accompagnent (YOSHIKAWA, 2010).

La figure A.12(b) montre un *satsuma biwa* fait de bois, de nacre et d'ivoire (METROPOLITAN MUSEUM OF ART). La figure A.12(a) montre un *biwa* à cinq cordes et cinq frettes joué par une musicienne. Enfin, la figure A.12(c) présente plus en détail un sillet de *biwa*.

Le *satsuma biwa* mesure environ 90 cm, il est joué à l'aide d'un plectre assez large. Sur le manche sont positionnées quatre frettes largement espacées et relativement hautes, la note peut ainsi être modifiée en exerçant une pression plus ou moins forte sur la corde entre deux frettes ou entre le sillet et la frette la plus proche. Le son spécifique de cet instrument est en particulier dû

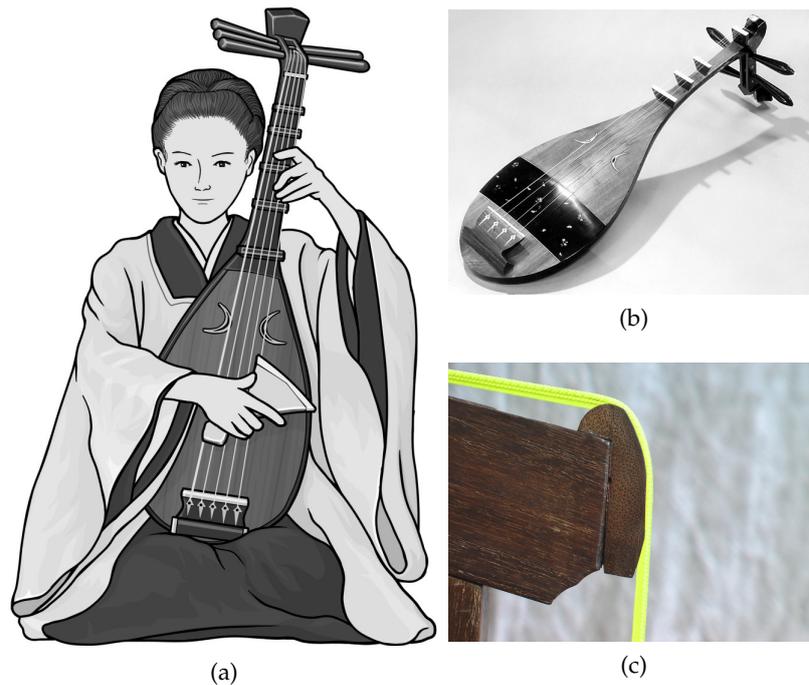


FIGURE A.12 – (a) Musicienne jouant du *chikuzen biwa*. Issu de : (IROM) (b) *Satsuma biwa*. Issu de : (METROPOLITAN MUSEUM OF ART) (c) Sillet de *chikuzen biwa*. Issu de : (GRINNELL COLLEGE)

à la largeur et à la forme des frettes, qui deviennent des obstacles à la vibration de la corde, de même que le chevalet arrondi sur d'autres instruments. Il existe plusieurs types de frettes, selon les cordes utilisées. Le sillet joue un rôle similaire, mais possède une forme plus arrondie que les frettes (YOSHIKAWA, 2010).

Le *chikuzen biwa* à 4 cordes mesure environ 83 cm, mais il en existe également ayant 5 cordes (YOSHIKAWA, 2010). Cet instrument est l'objet de (TAGUTI et al., 2001 ; TAGUTI, 2008), où il est notamment montré que la forme des frettes et du sillet favorisent les hautes fréquences et allongent leur durée d'émission.

A.2.5 La harpe gothique

La harpe gothique (voir la figure A.13(b)) est une harpe comportant des harpions (*bray pins* en anglais). Installés proche de l'extrémité basse des cordes, les harpions (voir la figure A.13(c)) constituent un obstacle à la vibration de la corde et confèrent une sonorité particulière à l'instrument. Si cet instrument était, semble-t-il, courant en Europe il y a quelques siècles, notamment pour accompagner des danses, il est actuellement plus rare et seules des reconstitutions sont disponibles (BESNAINOU et al., 2009).

La figure A.13(a) montre une représentation d'une tenue de harpe gothique. Cet instrument se joue en pinçant les cordes avec les doigts des deux mains.

La structure de la harpe est généralement en bois et les harpions peuvent être en bois, ivoire ou autre matériau. Ils peuvent la plupart du temps être positionnés de manière à affecter le son ou non (GROVE). Un exemple de harpe gothique est celui d'une harpe mesurant près de 1 m, comportant 23 cordes en boyau. Cependant, la taille de l'instrument, le bois utilisé ou encore le nombre de cordes peut varier d'un instrument à l'autre (ARDIVAL). La harpe gothique munies de harpions dits tangents ou affleurants est étudiée dans (BESNAINOU et al., 2009), avec pour dessein la construction de harpions en accord avec les souhaits des musiciens et le respect du répertoire existant.

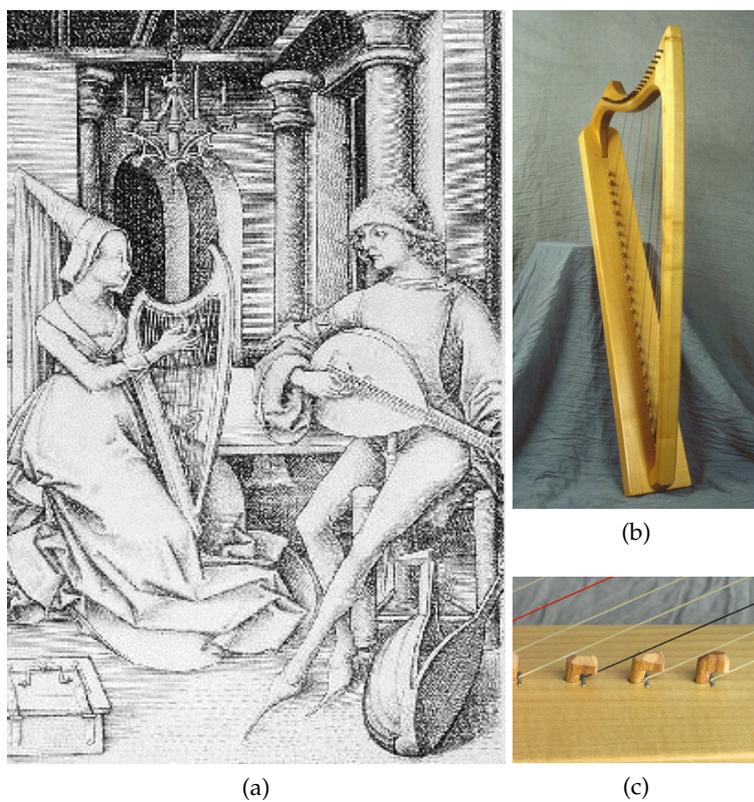


FIGURE A.13 – (a) Musicienne jouant de la harpe gothique. *Issu de : (GROVE)* (b) Harpe gothique. *Issu de : (GRINNELL COLLEGE)* (c) Détail des harpions. *Issu de : (GRINNELL COLLEGE)*

Annexe B

Résultats de périodicité de la littérature et extensions

B.1 Résultats de périodicité de la littérature

Dans cette annexe, nous rappelons quelques résultats de la littérature concernant la périodicité du mouvement d'une corde en présence d'un obstacle unilatéral. Nous considérons ici l'équation de la corde idéale en présence d'un obstacle parfaitement rigide. Le déplacement initial est donné par u_0 et la vitesse initiale est supposée nulle. Les données sont sans dimension, la hauteur de l'obstacle est donnée par $-h$ et le domaine spatial d'étude est $[-1/2, 1/2]$. En l'absence d'obstacle, la période du mouvement vaut 2.

Le tableau B.1 présente différents résultats de périodicité de la littérature. Dans ce tableau, des hypothèses (\mathcal{H}) et (\mathcal{S}) portant sur le déplacement initial sont considérées, nous les précisons ci-dessous.

L'ensemble d'hypothèses (\mathcal{H}) est le suivant (CABANNES, 1981) :

$$(\mathcal{H}) \left\{ \begin{array}{l} u_0(x) \quad \text{est continue pour } -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ du_0/dx \geq 0 \quad \text{pour } -1/2 \leq x \leq a < 1/2 \\ du_0/dx \leq 0 \quad \text{pour } -1/2 < a \leq x \leq 1/2 \\ u_0(\pm 1/2) = 0 \quad \text{et } u_0(a) = 1 \\ u_0(x) > -h \quad \text{pour } -1/2 \leq x \leq 1/2, \end{array} \right.$$

où $a \in [-1/2, 1/2]$ peut être interprété comme l'abscisse de pincement de la corde.

Par ailleurs, l'hypothèse (\mathcal{S}) se réfère à la symétrie de la condition initiale : $u_0(x) = u_0(-x)$.

Enfin, la presque-périodicité se rapporte à la définition B.1, extraite de (CABANNES, 1981).

Définition B.1 (*Presque-périodicité*). Une fonction $f(t)$ est dite presque-périodique si à tout nombre positif ϵ on peut faire correspondre une longueur $l(\epsilon)$, appelée intervalle d'inclusion, telle que tout intervalle de longueur l contienne un nombre τ (presque-période) pour lequel on a $\forall t$:

$$|f(t + \tau) - f(t)| < \epsilon.$$

Dans le cas d'une condition initiale symétrique autour de $x = 0$, comportant un maximum en $x = 0$ et deux minima en $x = \pm\alpha$, $0 < \alpha < 1/2$, des résultats supplémentaires de périodicité sont présentés dans (CABANNES, 1984b), pour le cas d'un obstacle ponctuel de hauteur $h = 0$. Ainsi, en posant $M = u(0, 0)/u(\alpha, 0)$, on obtient les résultats présentés dans le tableau B.2 pour les conditions initiales données dans les figures B.1(a) et B.1(b), la première étant affine par morceaux de pentes égales à $\pm 2(M + 2)$, et la seconde étant obtenue par changement de variable par rapport à la première.

Obstacle plan, parallèle à la corde au repos			
Condition initiale	h ($0 \leq h \leq 1$)	Périodique	Période
$1 - 2 x $ (\mathcal{H})	quelconque $p/q, p, q$ entiers	oui oui	$1+h$ $p + q$ si $p + q$ pair, $2(p + q)$ sinon
(\mathcal{H}), (\mathcal{S}) (\mathcal{H}), (\mathcal{S}), $u_0(x) \neq 1 - 2 x $	$p/q, p, q$ entiers irrationnel	oui presque	$p + q$ -
Obstacle ponctuel, au milieu de la corde			
Condition initiale	$h, (-1 \leq h \leq 1)$	Périodique	Période
$1 - 2 x $ (\mathcal{H})	quelconque $p/q, p, q$ entiers	oui oui	$(3 - h)/2$ $3q - p$
(\mathcal{H})	irrationnel	presque	-

TABLE B.1 – Résultats de périodicité issus des travaux d’H. Cabannes (CABANNES, 1981; HARAUX et al., 1983).

u_0 selon la figure B.1(a)		
M	Périodique	Période
$p/q > 2, p, q$ entiers	oui	$(3p^2 + 3pq - 8q^2)/(p + 2q)$ si p impair, la moitié sinon
$p/q < 2, p, q$ entiers	oui	$(12q^2 + 3pq - 2p^2)/(p + 2q)$ si p impair, la moitié sinon
2 irrationnel	oui non	$5/8$ -
u_0 selon la figure B.1(b)		
M	Périodique	Période
$p/q \geq 2, p, q$ entiers	oui	$(3p^2 + 3pq - 8q^2)$ si p impair, la moitié sinon
$p/q \leq 2, p, q$ entiers	oui	$(12q^2 + 3pq - 2p^2)$ si p impair, la moitié sinon
irrationnel	non	-

TABLE B.2 – Récapitulatif de résultats de périodicité pour un obstacle ponctuel, $h = 0$, issus de (CABANNES, 1984b).

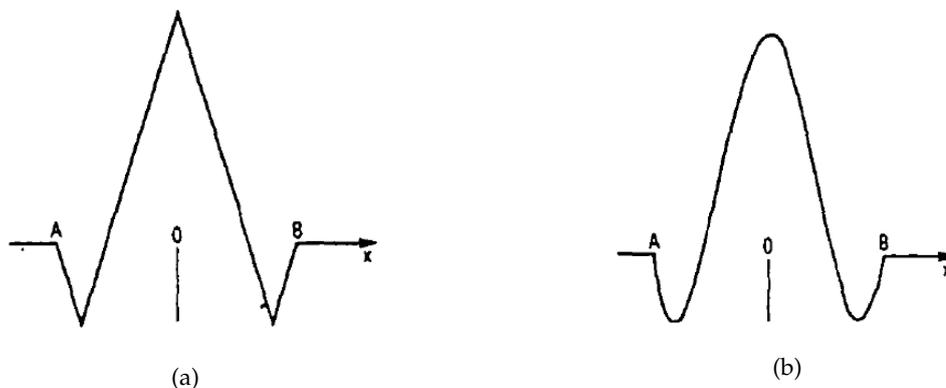


FIGURE B.1 – Conditions initiales. Issu de : (CABANNES, 1984b)

Enfin, quelques cas particuliers impliquant des obstacles dont les expressions combinent sinus et cosinus sont traités dans (CABANNES, 1985; CABANNES, 1987; CABANNES, 1996).

Les résultats présentés pour un obstacle ponctuel permettent d'établir la périodicité du mouvement lorsque l'obstacle est centré et pour certains types de conditions initiales. Il apparaît de plus de nombreux autres cas pour lesquels le mouvement est également périodique, qui ne semblent pas avoir été étudiés dans la littérature. Nous proposons ainsi, dans la section suivante, des résultats empiriques de périodicité dans le cas d'un obstacle ponctuel affleurant la corde au repos.

B.2 Extension des résultats au cas d'un pincement et d'un obstacle à une fraction entière de la longueur de la corde.

Nous considérons une corde adimensionnée s'étendant sur le domaine $[0, 1]$, pincée sans vitesse initiale et vibrant en présence d'un obstacle ponctuel affleurant la corde au repos. Nous cherchons à déterminer des positions d'obstacle et conditions initiales qui permettent d'obtenir un mouvement périodique de la corde vibrante. Par souci de simplicité, nous nous restreignons à un pincement sans vitesse initiale et dont le déplacement prend une forme triangulaire. Nous étudions tout d'abord le cas d'une corde pincée en son milieu, en présence d'un obstacle placé à une fraction entière de la corde.

B.2.1 Pincement au milieu de la corde

Soit un déplacement initial de forme triangulaire centrée et un obstacle placé en $\frac{1}{N}$, avec $N \in \mathbb{N}^*$. Nous cherchons à connaître le rapport $\frac{T_a}{T_s}$ des périodes avec et sans obstacle dans cette configuration, en supposant que le mouvement avec obstacle est périodique. Nous avons vu dans la section 2.4 que pour $N = 2$, ce rapport valait $\frac{T_a}{T_s} = \frac{3}{4}$. Nous proposons ici d'observer le mouvement d'une corde pincée en son milieu et en présence d'un obstacle situé en $\frac{1}{4}$, pas à pas. Nous nous appuyons pour cela sur la figure B.2, où la trame de construction est en traits pointillés noirs, l'obstacle est indiqué par un petit trait gras noir et la corde est en bleu.

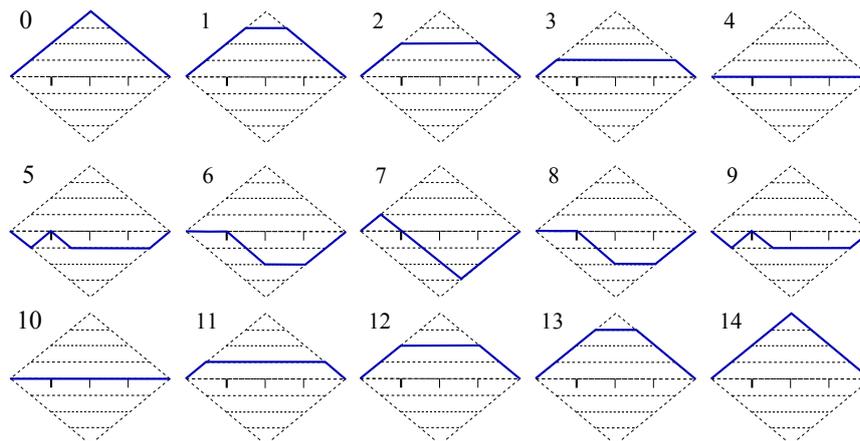


FIGURE B.2 – Mouvement d'une corde idéale pincée en son milieu, en présence d'un obstacle ponctuel affleurant la corde au repos en $x_{obst} = \frac{1}{4}$, pendant une période.

Pendant les quatre premières unités de temps, la corde se comporte comme en l'absence d'obstacle. Elle rencontre ensuite l'obstacle qui « sépare » la corde en une partie droite et une partie gauche. Tant que l'un de ces deux morceaux est en-dessous de la position au repos $u = 0$ de la corde, l'obstacle agit comme s'il définissait une nouvelle extrémité. La partie gauche oscille donc tant que la partie droite de la corde est sous la position de repos de la corde, de la cinquième

à la dixième unité de temps. La corde retrouve à ce moment sa position au repos, avec chacun des deux morceaux de corde dans un mouvement ascendant. Cette dynamique permet à la corde de se « détacher » de l'obstacle et de retourner à sa position initiale à la quatorzième unité de temps, contre seize unités de temps sans obstacle. Le rapport des périodes avec et sans obstacle vaut donc $\frac{T_a}{T_s} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$.

Nous proposons maintenant d'étendre ce raisonnement au cas plus général d'un obstacle placé en $\frac{1}{N}$, $N > 1$. Nous nous appuyons pour cela sur la figure B.3. Elle présente la trame de construction de la solution dans le cas d'une corde initialement pincée en son milieu, sans vitesse initiale et en présence d'un obstacle affleurant la corde au repos à la position $x_{obst} = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. La trame de construction est constituée de ce que nous appellerons des niveaux de construction, de 1 à N en-dessous de la position de la corde au repos, et de $1'$ à N' au-dessus.

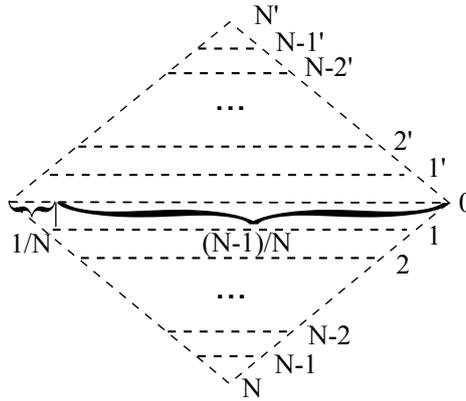


FIGURE B.3 – Trame de construction de la solution

Jusqu'à la position $u = 0$ de la corde, que l'on fait correspondre au temps 0, le mouvement est le même qu'en l'absence d'obstacle. Observons le comportement de la corde à partir de cet instant. La partie gauche de la corde, de longueur $\frac{1}{N}$, vibre entre l'extrémité gauche de la corde et l'obstacle tant que la partie droite de la corde, de longueur $\frac{N-1}{N}$, est en-dessous de la position $u = 0$. La partie gauche oscille donc entre les niveaux de construction 1 et $1'$, tandis que la partie droite évolue du niveau 0 au niveau $N - 1$, avant de revenir du niveau $N - 1$ vers le niveau 0. Considérons une unité de temps correspondant au temps nécessaire pour qu'une partie de corde passe d'un niveau au suivant. Au bout de deux unités de temps après l'instant 0, la partie gauche est à nouveau dans la position $u = 0$, dans un mouvement ascendant. Mais cette partie ne peut dépasser le niveau $1'$ tant que la partie droite est en-dessous du niveau 0, car alors l'obstacle se comporte comme une extrémité de chaque morceau de corde. Le mouvement global le plus simple est celui pour lequel la partie droite de la corde revient au niveau 0 dans un mouvement ascendant en même temps que la partie gauche. Dans ce cas, par la suite la corde remonte du niveau 0 au niveau N' initial de la même manière qu'en l'absence d'obstacle.

Observons à présent le comportement de la partie droite de la corde à partir de l'instant 0 afin de déterminer les conditions pour que ce mouvement global puisse advenir. La partie droite de la corde évolue du niveau 0 au niveau $N - 1$ puis suit le chemin inverse. Pour être au niveau 0 dans un mouvement ascendant, il faut donc $2N - 2$ unités de temps. La partie gauche, quant à elle, est dans cette situation toutes les $4p + 2$ unités de temps, $p \in \mathbb{N}$. Nous cherchons donc N tel que $2N - 2 = 4p + 2$. Cette condition n'est respectée que si N est un entier pair strictement positif.

Dans ces cas simples, la période totale dure deux unités de temps de moins qu'en l'absence de l'obstacle, on a donc $\frac{T_a}{T_s} = \frac{2N+2(N-1)}{4N} = \frac{2N-1}{2N}$. Les résultats obtenus empiriquement par simulation et/ou expérience et leur extension au cas général sont récapitulés dans le tableau B.3. Les simulations ont été conduites à l'aide de la méthode mixte (voir la section 3.2.1) et les expériences menées d'après le protocole décrit dans la section 4.1, en modifiant simplement la position de l'obstacle.

Pincement au milieu de la corde.				
x_{obst}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2N}$
$\frac{T_a}{T_s}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{4N-1}{4N}$

TABLE B.3 – Résultat général de périodicité pour une corde pincée en son milieu et un obstacle placé à une fraction entière $\frac{1}{2N}$, $N \in \mathbb{N}^*$ de la longueur de la corde.

Si l'obstacle ponctuel est placé en $x_{obst} = \frac{1}{N}$ avec N un entier positif impair, la période fondamentale du mouvement de la corde est plus grande qu'en l'absence de l'obstacle. Cela est dû au fait que les parties gauche et droite de la corde ne retournent à la position $u = 0$ en mouvement ascendant en même temps qu'après un temps bien plus long. Le mouvement de la corde en est complexifié, et la période augmentée. Par exemple, pour $x_{obst} = \frac{1}{3}$ (voir la figure B.4), on a $\frac{T_a}{T_s} = \frac{7}{3}$. L'obtention d'un résultat général pour N impair nécessiterait des investigations supplémentaires.

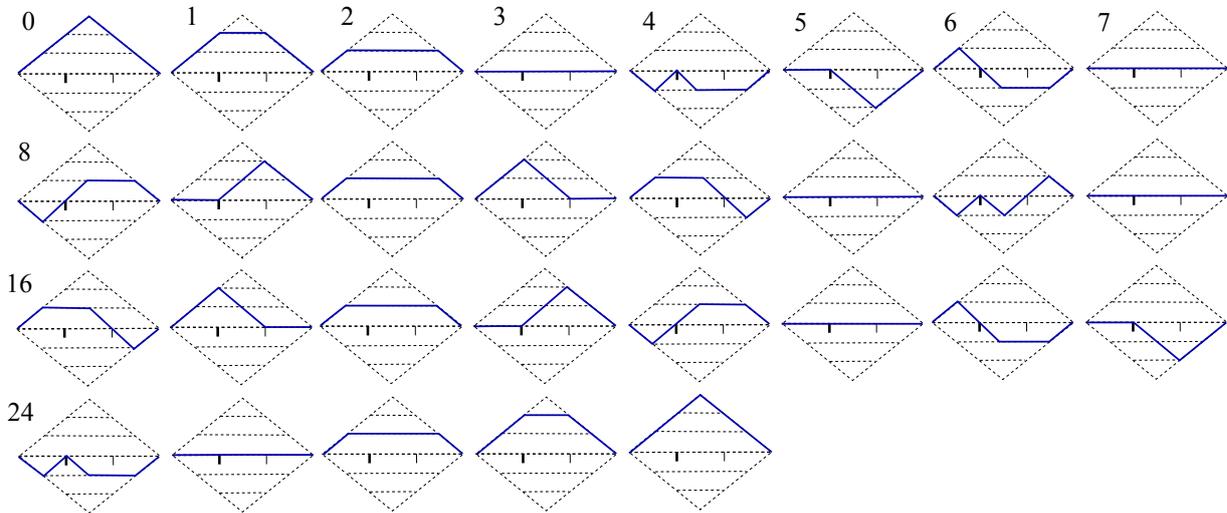


FIGURE B.4 – Mouvement d'une corde idéale pincée en son milieu, en présence d'un obstacle ponctuel affleurant la corde au repos en $x_{obst} = \frac{1}{3}$, pendant une période.

Dans la section suivante, nous étudions le cas d'une corde pincée en $\frac{p}{N}$ en présence d'un obstacle placé en $\frac{1}{N}$.

B.2.2 Obstacle en $x_{obst} = 1/N$ et pincement en $x_p = p/N$

Nous étudions à présent le cas d'un obstacle placé en $x_{obst} = 1/N$ et d'une condition initiale triangulaire dont le sommet se trouverait en $x_p = p/N$.

Nous observons tout d'abord le mouvement d'une corde pincée à la position de l'obstacle $x_{obst} = x_p = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$. Par rapport au cas d'un pincement centré, les niveaux de construction ne sont plus horizontaux mais obliques. Toutefois, le raisonnement présenté dans la section B.2.1 s'applique à nouveau, l'instant 0 correspondant au moment où la corde vient affleurer l'obstacle, au niveau 0. Pour $N = 3$, la construction de la solution est illustrée par la figure B.5. Le comportement est similaire à celui de la figure B.2. La corde se déplace comme en l'absence d'obstacle jusqu'à ce qu'elle rencontre ce dernier, qui agit comme une nouvelle extrémité tant que l'un des morceaux de la corde, droite ou gauche, se trouve sous le niveau 0. À la douzième unité de temps, la corde revient à la position 0 et chaque morceau de corde est dans un mouvement ascendant. La corde retrouve alors un mouvement semblable à celui qu'elle aurait en l'absence d'obstacle et revient finalement à sa position initiale après 16 unités de temps, contre 18 en l'absence d'obstacle. On obtient un rapport de périodes $\frac{T_a}{T_s} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$.

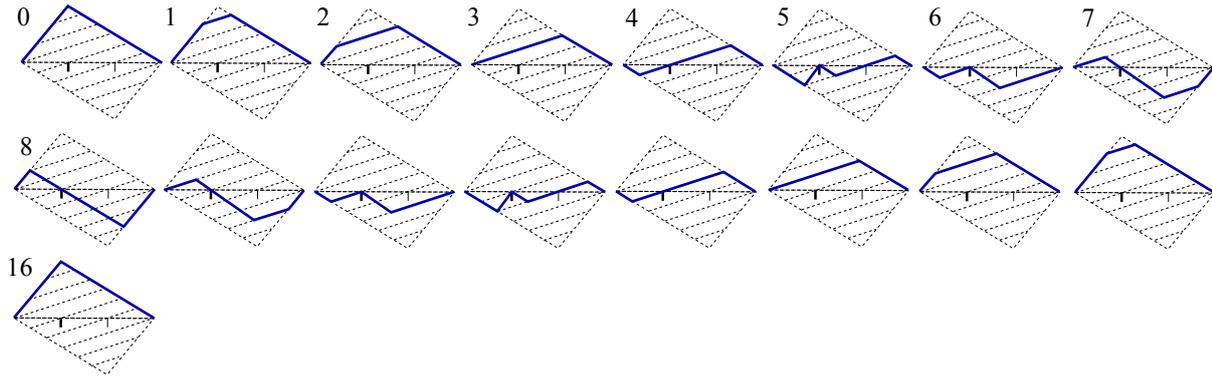


FIGURE B.5 – Mouvement d’une corde idéale en présence d’un obstacle ponctuel affleurant la corde au repos en $x_{obst} = \frac{1}{3}$, pincée à la position de l’obstacle, pendant une période.

À nouveau, les résultats obtenus empiriquement par simulation et/ou expérience et leur extension au cas général sont donnés dans le tableau B.4.

Pincement à la position de l’obstacle.				
x_{obst}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{N}$
$\frac{T_a}{T_s}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{N^2-1}{N^2}$

TABLE B.4 – Résultat général de périodicité pour une corde pincée à la position de l’obstacle $\frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$.

La formule obtenue se généralise à un pincement de la corde en $\frac{p}{N}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq N - 1$: $\frac{T_a}{T_s} = \frac{N^2-p}{N^2}$. Le cas particulier d’un obstacle en $x_{obst} = \frac{1}{3}$ et d’un pincement en $x_p = \frac{2}{3}$ est illustré sur la figure B.6, également présentée dans la section 2.4. Des résultats obtenus expérimentalement et/ou numériquement et leur généralisation sont présentés dans le tableau B.5.

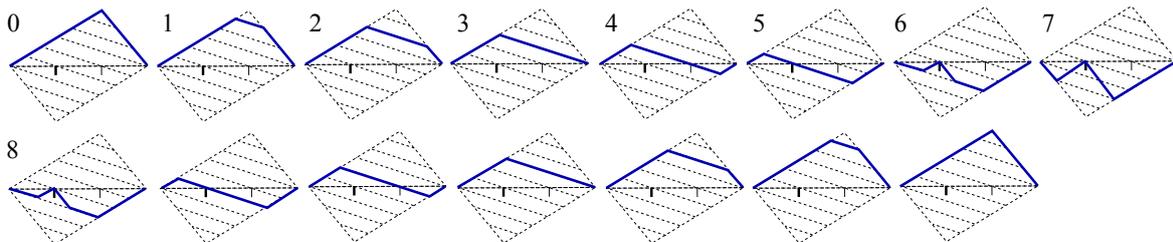


FIGURE B.6 – Mouvement d’une corde idéale pincée aux $\frac{2}{3}$ de la corde, en présence d’un obstacle ponctuel affleurant la corde au repos en $x_{obst} = \frac{1}{3}$, pendant une période.

Obstacle et pincement à des fractions entières de la corde.					
x_{obst}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{N}$
x_p	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{p}{N}$
$\frac{T_a}{T_s}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{23}{25}$	$\frac{22}{25}$	$\frac{N^2-p}{N^2}$

TABLE B.5 – Résultat général de périodicité pour une corde pincée en $x_p = \frac{p}{N}$ et un obstacle placé en $x_{obst} = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$.

Annexe C

Identités et inégalités pour l'analyse de stabilité

Dans cette annexe, nous démontrons trois propriétés portant sur les matrices impliquées dans le schéma mixte décrit dans la section 3.2.1. Ces propriétés permettent de mener à bien l'analyse de stabilité du schéma. Nous rappelons tout d'abord les identités suivantes, pour une matrice $N \times N$ symétrique semi-définie positive et un vecteur $\mathbf{u}^n \in \mathbb{R}^N$:

$$\langle \mathbf{M}\delta_{tt}\mathbf{u}^n, \delta_t.\mathbf{u}^n \rangle = \frac{1}{2}\delta_{t-} \langle \delta_{t+}\mathbf{u}^n, \mathbf{M}\delta_{t+}\mathbf{u}^n \rangle \quad (\text{C.1})$$

$$\langle \mathbf{M}\mathbf{u}^n, \delta_t.\mathbf{u}^n \rangle = \frac{1}{2}\delta_{t-} \langle \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{M}\mathbf{u}^n \rangle. \quad (\text{C.2})$$

Ces identités sont utiles pour les calculs de la preuve de la stabilité. Leur démonstration est directe. Nous donnons à présent les propriétés principales.

Propriété C.1. Soit \mathbf{M} une matrice $N \times N$ symétrique, semi-définie positive et $\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} \in \mathbb{R}^N$. On a alors :

$$\langle \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{M}\mathbf{u}^n \rangle \geq -\frac{\Delta t^2}{4} \langle \delta_{t+}\mathbf{u}^n, \mathbf{M}\delta_{t+}\mathbf{u}^n \rangle. \quad (\text{C.3})$$

Démonstration. \mathbf{M} étant symétrique, l'égalité suivante est vérifiée pour tous vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} dans \mathbb{R}^N :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{M}\mathbf{v} \rangle = \Delta x \sum_{i,k} m_{ik} v_i u_k = \Delta x \sum_{i,k} m_{ik} v_k u_i = \Delta x \langle \mathbf{v}, \mathbf{M}\mathbf{u} \rangle.$$

L'inégalité résulte ensuite de l'égalité suivante :

$$\langle \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{M}\mathbf{u}^n \rangle = \frac{1}{4} \langle \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n, \mathbf{M}(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) \rangle - \frac{\Delta t^2}{4} \langle \delta_{t+}\mathbf{u}^n, \mathbf{M}\delta_{t+}\mathbf{u}^n \rangle.$$

On obtient le résultat en supposant \mathbf{M} semi-définie positive. □

Propriété C.2. En reprenant les notations définies dans la section 3.2.1.3, on a : $1 + e_i \pm A_i > 0, \forall i$.

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas $0 < \sigma_i < \omega_i$.

On introduit $X = \sigma_i \Delta t$, $Y = \omega_i \Delta t$, et $Z = \sqrt{Y^2 - X^2}$. On a :

$$1 + e_i - A_i = 1 + e^{-2X} - 2e^{-X} \cos(Z) > 1 + e^{-2X} - 2e^{-X} = f_1(X).$$

$f_1(X)$ est positive puisque $f_1'(X) > 0$ et $f_1(0) = 0$, et donc $1 + e_i - A_i > 0$. Le même raisonnement donne $1 + e_i + A_i > 0$.

Considérons à présent le cas $0 < \omega_i < \sigma_i$. On définit $Z = \sqrt{X^2 - Y^2}$. On a alors :

$$1 + e_i - A_i = 1 + e^{-2X} - 2e^{-X} \cosh(Z) = f_2(X, Z).$$

Par hypothèse, $0 < \omega_i < \sigma_i$, si bien que $0 < Y < X$, et donc $0 < Z < X$. D'une part, $f_{2,X} > 2(e^{-X} - e^{-2X}) > 0$ et $f_2(0, Z) = 0$ (comme $0 < Z < X$, le cas limite est $X = Z = 0$). D'autre part, $f_{2,Z} = -2e^{-X} \sinh(Z) < 0$ et $f_2(X, X) = 0$. Finalement, $1 + e_i - A_i > 0$. Obtenir $1 + e_i + A_i > 0$ est direct. □

Propriété C.3. \check{D}_1, \check{D}_2 et \check{D}_3 (données dans la section (3.2.1.3)) sont symétriques et semi-définies positives.

Démonstration. La preuve est donnée pour \check{D}_2 et \check{D}_3 . La preuve pour \check{D}_1 est ensuite directe. On s'intéresse tout d'abord à \check{D}_2 .

\check{C}_2 étant diagonale et étant donné que $\mathbf{S}^{-1} = \Delta x \mathbf{S}^T$, la symétrie de \check{D}_2 s'obtient par construction de la matrice :

$$\check{D}_2 = \mathbf{S} \check{C}_2 \mathbf{S}^{-1} = \Delta x \mathbf{S} \check{C}_2 \mathbf{S}^T,$$

dont les coefficients sont donnés par :

$$\check{D}_{2_{ij}} = \Delta x \sum_{k=1}^{N-1} S_{ik} \check{C}_{2_{kk}} S_{kj}^T = \Delta x \sum_{k=1}^{N-1} S_{ik} \check{C}_{2_{kk}} S_{jk},$$

avec $i, j \in \{1, \dots, N-1\}$.

Montrons à présent que \check{D}_2 est semi-définie positive. Pour cela, il suffit de montrer que \check{C}_2 est semi-définie positive. En effet, soit \mathbf{C} une matrice carrée diagonale et $\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ avec $\tilde{\mathbf{S}} = \sqrt{\Delta x} \mathbf{S}$, où \mathbf{S} est telle que $\tilde{\mathbf{S}}^{-1} = \tilde{\mathbf{S}}^T$. Considérons \mathbf{q} et \mathbf{u} tels que $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{q}$. Alors : $\langle \mathbf{q}, \mathbf{C} \mathbf{q} \rangle = \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{q} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{D} \mathbf{u} \rangle$. Ainsi, si \mathbf{C} est semi-définie positive, \mathbf{D} l'est également.

Si les coefficients diagonaux de \check{C}_2 sont positifs, la preuve est conclue. Comme $\omega_i > 0 \forall i$, il faut montrer que $1 + (1 - \gamma_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2} + \sigma_i^* \Delta t > 0$. En développant et réarrangeant cette expression, on obtient :

$$1 + (1 - \gamma_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2} + \sigma_i^* \Delta t = \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2} \left(1 + \frac{1 - e_i}{1 + e_i} \right) \left[\frac{1 + e_i}{1 + e_i - A_i} \right]. \quad (\text{C.4})$$

(C.4) est positive si $1 + e_i - A_i > 0$. Cette condition est satisfaite (voir la propriété C.2), si bien que $1 + (1 - \gamma_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2} + \sigma_i^* \Delta t > 0$.

Finalement, \check{D}_2 est semi-définie positive. Dans le cas non amorti, cas limite du cas amorti, la démonstration est similaire, en partant d'une expression réduite des coefficients.

Étudions à présent \check{D}_3 , dont la symétrie s'obtient de même que précédemment.

Comme pour \check{D}_2 , il suffit de montrer que \check{C}_3 est semi-définie positive. Le dénominateur de $\check{C}_{3_{ii}}$ est positif, comme démontré précédemment. De plus, on a :

$$\sigma_i^* = \frac{1 - e_i}{1 + e_i} \left[\frac{\omega_i^2 \Delta t}{2} \left(1 + \frac{A_i}{1 + e_i - A_i} \right) \right]. \quad (\text{C.5})$$

Cette quantité étant positive, \check{D}_3 est donc semi-définie positive. Dans le cas non amorti, cette matrice n'intervient pas dans le problème, elle est nulle. □

Annexe D

Développement du schéma modal pour $N \in \{3, 4\}$

Dans cette annexe, nous proposons une écriture explicite du schéma modal présenté dans la section 3.2.2 pour $N = 3$ et $N = 4$, afin que le lecteur intéressé puisse en faire usage sans avoir à passer par la formulation générale donnée dans la section 3.2.2.4.

D.1 Cas $N = 3$

$$G_3^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[a_0(1 + e_{1+}e_{2+}e_{3+}) + a_1(e_{2+}e_{3+} + e_{1+}) \right. \\ \left. + a_2(e_{1+}e_{3+} + e_{2+}) + a_3(e_{1+}e_{2+} + e_{3+}) \right] G(n, n, n),$$

$$M_3^1 = a_0 \left[\alpha_0(e_{2+}e_{3+}) + \beta_{01}\beta_0(e_{2-}e_{3+}) + \gamma_{01}\gamma_0(e_{2+}e_{3-}) + (\beta_{02}\beta_0 + \gamma_{02}\gamma_0)(e_{2-}e_{3-}) \right] \\ + a_2 [\alpha_2(e_{3+}) + \beta_2(e_{3-})] + a_3 [\alpha_3(e_{2+}) + \beta_3(e_{2-})] + a_1, \\ M_3^2 = a_0 \left[\beta_0(e_{1+}e_{3+}) + \alpha_{01}\alpha_0(e_{1-}e_{3+}) + \gamma_{02}\gamma_0(e_{1+}e_{3-}) + (\alpha_{02}\alpha_0 + \gamma_{01}\gamma_0)(e_{1-}e_{3-}) \right] \\ + a_1 [\alpha_1(e_{3+}) + \beta_1(e_{3-})] + a_3 [\beta_3(e_{1+} + \alpha_3(e_{1-}))] + a_2, \\ M_3^3 = a_0 \left[\gamma_0(e_{1+}e_{2+}) + \alpha_{02}\alpha_0(e_{1-}e_{2+}) + \beta_{02}\beta_0(e_{1+}e_{2-}) + (\alpha_{01}\alpha_0 + \beta_{01}\beta_0)(e_{1-}e_{2-}) \right] \\ + a_1 [\beta_1(e_{2+}) + \alpha_1(e_{2-})] + a_2 [\beta_2(e_{1+}) + \alpha_2(e_{1-})] + a_3.$$

Les conditions sur les coefficients (positifs) sont données par :

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1, \\ \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 1, \\ \alpha_{01} + \alpha_{02} = 1, \beta_{01} + \beta_{02} = 1, \gamma_{01} + \gamma_{02} = 1, \\ \alpha_1 + \beta_1 = 1, \alpha_2 + \beta_2 = 1, \alpha_3 + \beta_3 = 1.$$

D.2 Cas $N = 4$

$$G_4^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[a_0(1 + e_{1+}e_{2+}e_{3+}e_{4+}) + a_1(e_{2+}e_{3+}e_{4+} + e_{1+}) + a_2(e_{1+}e_{3+}e_{4+} + e_{2+}) \right. \\ \left. + a_3(e_{1+}e_{2+}e_{4+} + e_{3+}) + a_4(e_{1+}e_{2+}e_{3+} + e_{4+}) + a_5(e_{1+}e_{2+} + e_{3+}e_{4+}) \right. \\ \left. + a_6(e_{1+}e_{3+} + e_{2+}e_{4+}) + a_7(e_{1+}e_{4+} + e_{2+}e_{3+}) \right],$$

$$M_4^1 = a_0 \left[\alpha_0(e_{2+}e_{3+}e_{4+}) + \beta_{01}\beta_0e_{2-}e_{3+}e_{4+} + \gamma_{01}\gamma_0e_{2+}e_{3-}e_{4+} + \delta_{01}\delta_0e_{2+}e_{3+}e_{4-} \right. \\ \left. + (\beta_{021}\beta_{02}\beta_0 + \gamma_{021}\gamma_{02}\gamma_0)e_{2-}e_{3-}e_{4+} + (\beta_{031}\beta_{03}\beta_0 + \delta_{021}\delta_{02}\delta_0)e_{2-}e_{3+}e_{4-} \right. \\ \left. + (\gamma_{031}\gamma_{03}\gamma_0 + \delta_{031}\delta_{03}\delta_0)e_{2+}e_{3-}e_{4-} \right. \\ \left. + ((\beta_{022}\beta_{02} + \beta_{032}\beta_{03})\beta_0 + (\gamma_{022}\gamma_{02} + \gamma_{032}\gamma_{03})\gamma_0 + (\delta_{022}\delta_{02} + \delta_{032}\delta_{03})\delta_0)e_{2-}e_{3-}e_{4-} \right] \\ + a_2 \left[\alpha_2(e_{3+}e_{4+}) + \beta_{21}\beta_2(e_{3-}e_{4+}) + \gamma_{21}\gamma_2(e_{3+}e_{4-}) + (\beta_{22}\beta_2 + \gamma_{22}\gamma_2)e_{3-}e_{4-} \right] \\ + a_3 \left[\alpha_3(e_{2+}e_{4+}) + \beta_{31}\beta_3(e_{2-}e_{4+}) + \gamma_{31}\gamma_3(e_{2+}e_{4-}) + (\beta_{32}\beta_3 + \gamma_{32}\gamma_3)e_{2-}e_{4-} \right] \\ + a_4 \left[\alpha_4(e_{2+}e_{3+}) + \beta_{41}\beta_4(e_{2-}e_{3+}) + \gamma_{41}\gamma_4(e_{2+}e_{3-}) + (\beta_{42}\beta_4 + \gamma_{42}\gamma_4)e_{2-}e_{3-} \right] \\ + a_5 \left[\alpha_5e_{2+} + \beta_5e_{2-} \right] + a_6 \left[\alpha_6e_{3+} + \beta_6e_{3-} \right] + a_7 \left[\alpha_7e_{4+} + \beta_7e_{4-} \right] + a_1,$$

$$M_4^2 = a_0 \left[\beta_0(e_{1+}e_{3+}e_{4+}) + \alpha_{01}\alpha_0e_{1-}e_{3+}e_{4+} + \gamma_{02}\gamma_0e_{1+}e_{3-}e_{4+} + \delta_{02}\delta_0e_{1+}e_{3+}e_{4-} \right. \\ \left. + (\alpha_{021}\alpha_{02}\alpha_0 + \gamma_{011}\gamma_{01}\gamma_0)e_{1-}e_{3-}e_{4+} + (\alpha_{031}\alpha_{03}\alpha_0 + \delta_{011}\delta_{01}\delta_0)e_{1-}e_{3+}e_{4-} \right. \\ \left. + (\gamma_{032}\gamma_{03}\gamma_0 + \delta_{032}\delta_{03}\delta_0)e_{1+}e_{3-}e_{4-} \right. \\ \left. + ((\alpha_{022}\alpha_{02} + \alpha_{032}\alpha_{03})\alpha_0 + (\gamma_{012}\gamma_{01} + \gamma_{031}\gamma_{03})\gamma_0 + (\delta_{012}\delta_{01} + \delta_{031}\delta_{03})\delta_0)e_{1-}e_{3-}e_{4-} \right] \\ + a_1 \left[\alpha_1(e_{3+}e_{4+}) + \beta_{11}\beta_1(e_{3-}e_{4+}) + \gamma_{11}\gamma_1(e_{3+}e_{4-}) + (\beta_{12}\beta_1 + \gamma_{12}\gamma_1)e_{3-}e_{4-} \right] \\ + a_3 \left[\beta_3(e_{1+}e_{4+}) + \alpha_{31}\alpha_3(e_{1-}e_{4+}) + \gamma_{32}\gamma_3(e_{1+}e_{4-}) + (\alpha_{32}\alpha_3 + \gamma_{31}\gamma_3)e_{1-}e_{4-} \right] \\ + a_4 \left[\beta_4(e_{1+}e_{3+}) + \alpha_{41}\alpha_4(e_{1-}e_{3+}) + \gamma_{42}\gamma_4(e_{1+}e_{3-}) + (\alpha_{42}\alpha_4 + \gamma_{41}\gamma_4)e_{1-}e_{3-} \right] \\ + a_5 \left[\beta_5e_{1+} + \alpha_5e_{1-} \right] + a_6 \left[\gamma_6e_{4+} + \delta_6e_{4-} \right] + a_7 \left[\gamma_7e_{3+} + \delta_7e_{3-} \right] + a_2,$$

$$\begin{aligned}
M_4^3 = & a_0 \left[\gamma_0(e_{1+}e_{2+}e_{4+}) + \alpha_{02}\alpha_0e_{1-}e_{2+}e_{4+} + \beta_{02}\beta_0e_{1+}e_{2-}e_{4+} + \delta_{03}\delta_0e_{1+}e_{2+}e_{4-} \right. \\
& + (\alpha_{011}\alpha_{01}\alpha_0 + \beta_{011}\beta_{01}\beta_0)e_{1-}e_{2-}e_{4+} + (\alpha_{032}\alpha_{03}\alpha_0 + \delta_{012}\delta_{01}\delta_0)e_{1-}e_{2+}e_{4-} \\
& + (\beta_{032}\beta_{03}\beta_0 + \delta_{022}\delta_{02}\delta_0)e_{1+}e_{2-}e_{4-} \\
& \left. + ((\alpha_{012}\alpha_{01} + \alpha_{031}\alpha_{03})\alpha_0 + (\beta_{012}\beta_{01} + \beta_{031}\beta_{03})\beta_0 + (\delta_{011}\delta_{01} + \delta_{021}\delta_{02})\delta_0)e_{1-}e_{2-}e_{4-} \right] \\
& + a_1 \left[\beta_1(e_{2+}e_{4+}) + \alpha_{11}\alpha_1(e_{2-}e_{4+}) + \gamma_{12}\gamma_1(e_{2+}e_{4-}) + (\alpha_{12}\alpha_1 + \gamma_{11}\gamma_1)e_{2-}e_{4-} \right] \\
& + a_2 \left[\beta_2(e_{1+}e_{4+}) + \alpha_{21}\alpha_2(e_{1-}e_{4+}) + \gamma_{22}\gamma_2(e_{1+}e_{4-}) + (\alpha_{22}\alpha_2 + \gamma_{21}\gamma_2)e_{1-}e_{4-} \right] \\
& + a_4 \left[\gamma_4(e_{1+}e_{2+}) + \alpha_{42}\alpha_4(e_{1-}e_{2+}) + \beta_{42}\beta_4(e_{1+}e_{2-}) + (\alpha_{41}\alpha_4 + \beta_{41}\beta_4)e_{1-}e_{2-} \right] \\
& + a_5 \left[\gamma_5e_{4+} + \delta_5e_{4-} \right] + a_6 \left[\beta_6e_{1+} + \alpha_6e_{1-} \right] + a_7 \left[\delta_7e_{2+} + \gamma_7e_{2-} \right] + a_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_4^4 = & a_0 \left[\delta_0(e_{1+}e_{2+}e_{3+}) + \alpha_{03}\alpha_0e_{1-}e_{2+}e_{3+} + \beta_{03}\beta_0e_{1+}e_{2-}e_{3+} + \gamma_{03}\gamma_0e_{1+}e_{2+}e_{3-} \right. \\
& + (\alpha_{012}\alpha_{01}\alpha_0 + \beta_{012}\beta_{01}\beta_0)e_{1-}e_{2-}e_{3+} + (\alpha_{022}\alpha_{02}\alpha_0 + \gamma_{012}\gamma_{01}\gamma_0)e_{1-}e_{2+}e_{3-} \\
& + (\beta_{022}\beta_{02}\beta_0 + \gamma_{022}\gamma_{02}\gamma_0)e_{1+}e_{2-}e_{3-} \\
& \left. + ((\alpha_{011}\alpha_{01} + \alpha_{021}\alpha_{02})\alpha_0 + (\beta_{011}\beta_{01} + \beta_{021}\beta_{02})\beta_0 + (\gamma_{011}\gamma_{01} + \gamma_{021}\gamma_{02})\gamma_0)e_{1-}e_{2-}e_{3-} \right] \\
& + a_1 \left[\gamma_1(e_{2+}e_{3+}) + \alpha_{12}\alpha_1(e_{2-}e_{3+}) + \beta_{12}\beta_1(e_{2+}e_{3-}) + (\alpha_{11}\alpha_1 + \beta_{11}\beta_1)e_{2-}e_{3-} \right] \\
& + a_2 \left[\gamma_2(e_{1+}e_{3+}) + \alpha_{22}\alpha_2(e_{1-}e_{3+}) + \beta_{22}\beta_2(e_{1+}e_{3-}) + (\alpha_{21}\alpha_2 + \beta_{21}\beta_2)e_{1-}e_{3-} \right] \\
& + a_3 \left[\gamma_3(e_{1+}e_{2+}) + \alpha_{32}\alpha_3(e_{1-}e_{2+}) + \beta_{32}\beta_3(e_{1+}e_{2-}) + (\alpha_{31}\alpha_3 + \beta_{31}\beta_3)e_{1-}e_{2-} \right] \\
& + a_5 \left[\delta_5e_{3+} + \gamma_5e_{3-} \right] + a_6 \left[\delta_6e_{2+} + \gamma_6e_{2-} \right] + a_7 \left[\beta_7e_{1+} + \alpha_7e_{1-} \right] + a_4.
\end{aligned}$$

Les conditions sur les coefficients (positifs) sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &= 1, \\
\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 + \delta_0 &= 1, \\
\alpha_i + \beta_i + \gamma_i &= 1, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \\
\alpha_i + \beta_i = \gamma_i + \delta_i &= 1, \forall i \in \{5, 6, 7\}, \\
\alpha_{01} + \alpha_{02} + \alpha_{03} &= 1, \\
\beta_{01} + \beta_{02} + \beta_{03} &= 1, \\
\gamma_{01} + \gamma_{02} + \gamma_{03} &= 1, \\
\alpha_{0i1} + \alpha_{0i2} &= 1, \forall i \in \{1, 2, 3\}, \\
\beta_{0i1} + \beta_{0i2} &= 1, \forall i \in \{1, 2, 3\}, \\
\gamma_{0i1} + \gamma_{0i2} &= 1, \forall i \in \{1, 2, 3\}, \\
\delta_{0i1} + \delta_{0i2} &= 1, \forall i \in \{1, 2, 3\}, \\
\alpha_{i1} + \alpha_{i2} &= 1, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \\
\beta_{i1} + \beta_{i2} &= 1, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \\
\gamma_{i1} + \gamma_{i2} &= 1, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}.
\end{aligned}$$

Bibliographie

- ACARY, V. (2009). « Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts ». In : *JNRR'09 - 7èmes Journées Nationales de la Recherche en Robotique*. URL : <https://hal.inria.fr/inria-00425090>.
- (2012). « Higher order event capturing time-stepping schemes for nonsmooth multibody systems with unilateral constraints and impacts ». In : *Applied Numerical Mathematics* 62, p. 1259–1275.
- (2016). « Energy conservation and dissipation properties of time-integration methods for nonsmooth elastodynamics with contact ». In : *ZAMM* 96 (5), p. 585–603.
- ACARY, V. et B. BROGLIATO (2008). *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems. Applications in mechanics and electronics*. T. 35. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer Verlag.
- ACOUSTICS & ENVIRONMENTAL HYDROACOUSTICS LAB. *Altérateur de timbre dans les cordophones*. URL : http://ehl.ulb.ac.be/research_cordophones.html (visité le 20/04/2015).
- AHN, J. (2007). « A vibrating string with dynamic frictionless impact ». In : *Applied Numerical Mathematics* 57, p. 861–884.
- ALSAHLANI, A. et R. MUKHERJEE (2010). « Vibration of a string wrapping and unwrapping around an obstacle ». In : *Journal of Sound and Vibration* 329, p. 2707–2715.
- AMERIO, L. (1978). « Continuous solutions of the problem of a string vibrating against an obstacle ». In : *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* 59, p. 67–96.
- (1986). « Support domains for the vibrating string equation with unilateral constraints ». In : *Euromech 209, Vibrations with unilateral constraints*, p. 9–32.
- ARDIVAL HARPS. *Ardival harps*. URL : <http://www.ardival.com/> (visité le 23/04/2015).
- ARISAWA, S. (2011). « Creating and recreating musical identity : performance style and the role of *Ryûha* in the transmission of *Jiuta-sôkyoku* ». In : *Bulletin of Tokyo Gakugei University, Division of Comprehensive Educational Science II* 62, p. 351–364.
- ASKENFELT, A. (2010). « Double Bass ». In : *The science of string instruments*. Sous la dir. de T. D. ROSSING. Springer New York, p. 259–277.
- ASTASHEV, V.K. et V.L. KRUPENIN (2001). « Experimental investigation of vibrations of strings interaction with point obstacles ». In : *Doklady Physics* 46 (7), p. 522–525.
- BACON, T. *Electric bass guitar*. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/45729> (visité le 02/03/2017).
- BACON, T. et A. SHEETS. *Electric bass guitar*. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com:80/subscriber/article/grove/music/A2249340> (visité le 24/04/2017).
- BALLARD, P. (2000). « The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 154 (3), p. 199–274.
- BANERJEE, A., A. CHANDA et R. DAS (2017). « Historical origin and recent development on normal directional impact models for rigid body contact simulation : a critical review ». In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 24 (2), p. 397–422.
- BATAILLY, A., M. LEGRAND, A. MILLECAMPES et F. GARCIN (2012). « Numerical-experimental comparison in the simulation of rotor/stator interaction through blade-tip/abradable coating contact ». In : *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134 (8).
- BAUCHAU, O. A. et A. LAULUSA (2008). « Review of contemporary approaches for constraint enforcement in multibody systems ». In : *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 3 (1), p. 1–8.

- BEARE AND SON. *Bass fingerboard*. URL : <http://www.beareandson.co.uk/bass-fingerboard-1a3-198-p.asp> (visité le 22/04/2015).
- BERTAILS-DESCOUBES, F., F. CADOUX, G. DAVIER et V. ACARY (2011). « A nonsmooth Newton solver for capturing exact Coulomb friction in fiber assemblies ». In : *ACM Transactions on Graphics* 30 (1), 6 :1–6 :14.
- BERTRAND, D. (1992). *Les chevalets "plats" de la lutherie d'Inde*. Editions de la MSH.
- BESNAINOU, C. et V. MUSSON-GONNEAUD (2009). « Les harpions - questions organologiques et musicales : quel(s) réglage(s) pour quel usage sur les harpes anciennes aujourd'hui ? » In : *CIM09*. France, p. 30–32.
- BHATTACHARYYA, K. L., B. K. GHOSH et S. K. CHATTERJEE (1956). « Observations on the vibration of the indian plucked stringed instrument, "Tanpura" ». In : *Naturwissenschaften* 43 (5), p. 103–104.
- BILBAO, S. (2009). *Numerical sound synthesis : finite difference schemes and simulation in musical acoustics*. Wiley, Chichester.
- (2014). « Numerical modeling of string/barrier collisions ». In : *International Symposium on Musical Acoustics, ISMA 2014, Le Mans*.
- BILBAO, S. et A. TORIN (2014). « Numerical simulation of string/barrier collisions : the fretboard ». In : *International Conference on Digital Audio Effects, DAFx-14, Erlangen*.
- BILBAO, S., A. TORIN et V. CHATZIOANNOU (2015). « Numerical modeling of collisions in musical instruments ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 101, p. 155–173.
- BOUTILLON, X. (1988). « Model for piano hammers : experimental determination and digital simulation ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 83 (2), p. 746–754.
- GROVE. *Brays*. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/L2275367> (visité le 24/04/2017).
- BRIDGES, J. et M. VAN WALSTIJN (2015). « Investigation of tanpura string vibrations using a two-dimensional time-domain model incorporating coupling and bridge friction ». In : *Vienna Talk on Music Acoustics, Vienna*.
- BROGLIATO, B. (1999). *Nonsmooth mechanics*. Springer Verlag, London.
- BRUGUIÈRE, P. *Rudra Vina*. URL : <http://www.rudravina.com/> (visité le 31/10/2014).
- BURRIDGE, R., J. KAPPRAFF et C. MORSHEDI (1982). « The sitar string, a vibrating string with a one-sided inelastic constraint ». In : *SIAM Journal of Applied Mathematics* 42 (6), p. 1231–1251.
- CABANNES, H. (1981). « Mouvements presque-périodiques d'une corde vibrante en présence d'un obstacle fixe, rectiligne ou ponctuel ». In : *International Journal of Non-linear Mechanics* 16 (5/6), p. 449–458.
- (1984a). « Cordes vibrantes avec obstacles ». In : *Acustica* 55, p. 14–20.
- (1984b). « Periodic motions of a string vibrating against a fixed point-mass obstacle : II ». In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 6, p. 55–67.
- (1985). « Mouvement d'une corde vibrante en présence d'un obstacle convexe : un problème à frontière libre ». In : *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences, t. 301, Série II* (3), p. 125–129.
- (1987). « Motion of a vibrating string in the presence of a convex obstacle : a free boundary problem ». In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 9, p. 276–297.
- (1996). « Presentation of software for movies of vibrating strings with obstacles ». In : *Applied Mathematics Letters* 10 (5), p. 79–84.
- CARACALLA, H. et R. MURGAT (2015). *Étude expérimentale d'une corde vibrante de basse électrique avec contact unilatéral*. Rapport de projet d'étude, Université Pierre et Marie Curie.
- CHABASSIER, J. (2012). « Modélisation et simulation numérique d'un piano par modèles physiques ». Thèse de doct. École Polytechnique.
- CHABASSIER, J. et P. JOLY (2010). « Energy preserving schemes for nonlinear Hamiltonian systems of wave equations : application to the vibrating piano string ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199, p. 2779–2795.

- CHADEFAUX, D., J.-L. LE CARROU, M.-A. VITRANI, S. BILLOUT et L. QUARTIER (2012). « Harp plucking robotic finger ». In : *IEEE/RSJ International conference on intelligent robots and systems*. Vilamoura.
- CHAIGNE, A. et A. ASKENFELT (1994). « Numerical simulations of piano strings. I. A physical model for a struck string using finite difference methods ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 95 (2), p. 1112–1118.
- CHAIGNE, A., P. JOLY et L. RHAOUTI (2000). « Numerical modeling of the timpani ». In : *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona*.
- CHATZIOANNOU, V. et M. VAN WALSTIJN (2015). « Energy conserving schemes for the simulation of musical instrument contact dynamics ». In : *Journal of Sound and Vibration* 339, p. 262–279.
- CHEN, Z.-K. et K. SAWA (1994). « Polarity Effect of Unsymmetrical Arc Erosion and Contact Material Combination on the Resistance Behaviour ». In : *IEEE Holm conference on electrical contacts*. Chicago, p. 79–88.
- CHESNE, S., C. PEZERAT et J. L. GUYADER (2006). « Identification of boundary forces in beams from measured displacements ». In : *Journal of vibration and acoustics* 128 (6), p. 757–771.
- CHEVEIGNÉ, A. de et H. KAWAHARA (2002). « YIN, a fundamental frequency estimator for speech and music ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 111 (4), p. 1917–1930.
- CITÉ DE LA MUSIQUE DE PARIS. *Cité de la musique de Paris*. URL : <http://www.citedelamusique.fr/francais/> (visité le 30/10/2014).
- CITRINI, C. (1986). « An introduction to unilateral problems for the vibrating string equation ». In : *Euromech 209, Vibrations with unilateral constraints*, p. 1–8.
- COCHRANE, L. *sarangi*. Sous la dir. d'ALISON LATHAM. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com:80/subscriber/article/opr/t114/e5892> (visité le 24/04/2017).
- CUESTA, C. et C. VALETTE (1988). « Évolution temporelle de la vibration des cordes de clavecin ». In : *Acustica* 66, p. 37–45.
- (1990). « Théorie de la corde pincée en approximation linéaire ». In : *Acustica* 71, p. 28–40.
- DE FERRANTI, H. *Biwa*. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/03169> (visité le 24/04/2017).
- DEBUT, V., J. ANTUNES, M. MARQUES et M. CARVALHO (2016). « Physics-based modeling techniques of a twelve-string Portuguese guitar : a non-linear time-domain computational approach for the multiple-strings/bridge/soundboard coupled dynamics ». In : *Applied Acoustics* 108, p. 3–18.
- DEMOUCRON, M., S. WEISSER et M. LEMAN (2012). « Sculpting the sound. Timbre-shapers in classical hindustani chordophones ». In : *CompMusic Workshop*. 12-13 juillet.
- DERJAGUIN, B. V., V. M. MULLER et Y. P. TOPOROV (1975). « Effect of contact deformations on the adhesion of particles ». In : *Journal of colloid and interface science* 52 (2), p. 314–326.
- DESVAGES, C. et S. BILBAO (2015). « Two-polarisation finite difference model of bowed strings with nonlinear contact and friction forces ». In : *International Conference on Digital Audio Effects, DAFx-15, Trondheim*.
- DESVAGES, C., S. BILBAO et M. DUCCESCHI (2016). « Improved frequency-dependent damping for time domain modelling of linear string vibration ». In : *Proceedings of the 22nd International Congress on Acoustics*.
- DICK, A. *Tambura*. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/27446> (visité le 24/04/2017).
- DICK, A., R. WIDDESS et G. GEEKIE. *Vina*. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/51149> (visité le 24/04/2017).
- DONAHUE, T. L. H., M. L. HULL, M. RASHID M. et C. R. JACOBS (2002). « A finite element model of the human knee joint for the study of tibio-femoral contact ». In : *Journal of Biomechanical Engineering* 124, p. 273–280.
- DOYEN, David, Alexandre ERN et Serge PIPERNO (2011). « Time-integration schemes for the finite element dynamic Signorini problem ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 33 (1), p. 223–249.

- DUBOIS, G. (2012). « Modèle de contact dynamique pneumatique chaussée par approche multi-aspérités : application au bruit de roulement ». Thèse de doct. École Centrale de Nantes.
- DUCCESCHI, M. (2017). « A numerical scheme for various nonlinear forces, including collisions, which does not require an iterative root finder ». In : *International Conference on Digital Audio Effects, DAFx-17, Edinburgh*.
- DUCCESCHI, M., O. CADOT, C. TOUZÉ et S. BILBAO (2014). « Dynamics of the wave turbulence spectrum in vibrating plates : A numerical investigation using a conservative finite difference scheme ». In : *Physica D* 280–281, p. 73–85.
- DZONOU, R. et M. D. P. MONTEIRO MARQUES (2007). « A sweeping process approach to inelastic contact problems with general inertia operators ». In : *European journal of mechanics. A. Solids* 26 (3), p. 474–490.
- DZONOU, R., M. D. P. MONTEIRO MARQUES et L. PAOLI (2009). « A convergence result for a vibro-impact problem with a general inertia operator ». In : *Nonlinear Dynamics* 58 (1), p. 361.
- EVANGELISTA, G. (2011). « Physical model of the string-fret interaction ». In : *International Conference on Digital Audio Effects, DAFx-11, Paris*.
- EVANGELISTA, G. et F. ECKERHOLM (2010). « Player-instrument interaction models for digital waveguide synthesis of guitar : touch and collisions ». In : *IEEE transactions on audio, speech, and language processing* 18 (4), p. 822–832.
- FLEISCHER, H. (2005). « Vibration of an electric bass guitar ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 91, p. 247–260.
- FLEISCHER, H. et T. ZWICKER (1998). « Mechanical vibrations of electric guitars ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 84, p. 758–765.
- FLETCHER, N. H. et T. D. ROSSING (1998). *The physics of musical instruments, second edition*. Springer New York.
- FLORES, P. et J. AMBRÓSIO (2010). « On the contact detection for contact-impact analysis in multibody systems ». In : *Multibody System Dynamics* 24, p. 103–122.
- GE, Z. et J. E. MARSDEN (1988). « Lie-Poisson Hamilton-Jacobi theory and Lie-Poisson integrators ». In : *Physics Letters A* 133 (3), p. 134–139.
- GOLDSMITH, W. (2001). *Impact*. Dover publications, Mineola.
- GRINNELL COLLEGE. *Grinnell college musical instrument collection*. URL : <https://omeka1.grinnell.edu/MusicalInstruments> (visité le 04/06/2017).
- HAIRER, E., C. LUBICH et G. WANNER (2006). *Geometric numerical integration*. Springer Verlag, Berlin.
- HARAUX, A. et H. CABANNES (1983). « Almost periodic motion of a string vibrating against a straight fixed obstacle ». In : *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* 7 (2), p. 129–141.
- HARMON, D. (2010). « Robust, efficient, and accurate contact algorithms ». Thèse de doct. Columbia University.
- HERTZ, H. (1882). « Über die Berührung fester elastischer Körper ». In : *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 29, p. 156–171.
- HUNT, K. et F. CROSSLEY (1975). « Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact ». In : *Journal of Applied Mechanics*, p. 440–445.
- INDIA INSTRUMENTS. *Welcome to India Instruments*. URL : <http://www.india-instruments.com> (visité le 21/04/2015).
- IROM BOOK. *stringed instruments*. URL : <http://graphic.nobody.jp> (visité le 06/04/2017).
- ISSANCHOU, C., J.-L. LE CARROU, C. TOUZÉ et O. DOARÉ (2015). « Etude du contact corde / frette ». In : *Congrès Français de Mécanique CFM 2015, Lyon*.
- ISSANCHOU, C., S. BILBAO, J.-L. LE CARROU, C. TOUZÉ et O. DOARÉ (2016a). « A modal approach to the numerical simulation of a string vibrating against an obstacle : applications to sound synthesis ». In : *International Conference on Digital Audio Effects, DAFx-16, Brno*.

- ISSANCHOU, C., S. BILBAO, O. DOARÉ, J.-L. LE CARROU et C. TOUZÉ (2016b). « Méthode modale mixte pour le contact unilatéral corde / obstacle : application au chevalet de la tampoura ». In : *Congrès Français d'Acoustique, CFA 2016*. Le Mans.
- ISSANCHOU, C., S. BILBAO, J.-L. LE CARROU, C. TOUZÉ et O. DOARÉ (2017a). « A modal-based approach to the nonlinear vibration of strings against a unilateral obstacle : simulations and experiments in the pointwise case ». In : *Journal of Sound and Vibration* 393, p. 229–251.
- ISSANCHOU, C., J.-L. LE CARROU, C. TOUZÉ, B. FABRE et O. DOARÉ (2017b). « Méthode modale mixte pour la simulation numérique de contacts multiples entre une corde vibrante et un obstacle ». In : *Colloque national en calcul des structures, CSMA 2017*. Giens.
- (2017c). « String / fretboard interaction in electric basses : simulations and experiments. » In : *International Symposium on Musical Acoustics, ISMA 2017*. Montreal.
- (2018). « String/frets contacts in the electric bass sound : Simulations and experiments. » In : *Applied Acoustics* 129, p. 217–228.
- JOHNSON, K. L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press.
- JOHNSON, K. L., K. KENDALL et A. D. ROBERTS (1971). « Surface energy and the contact of elastic solids ». In : *Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. T. 324. 1558. The Royal Society, p. 301–313.
- KARTOFELEV, D., A. STULOV et V. VÄLIMÄKI (2015). « Pitch glide effect induced by a nonlinear string-barrier interaction ». In : *American Institute of Physics Conference*.
- KING CORDES. *King Cordes*. URL : <http://www.king-cordes.com/> (visité le 22/04/2015).
- KRAMER, P., J. ABESSER, C. DITTMAR et G. SCHULLER (2017). « A digital waveguide model of the electric bass guitar including different playing techniques ». In : *IEEE International conference on acoustics, speech and signal processing*, p. 353–356.
- LA MAISON DE LA CORDE. *La maison de la corde*. URL : <http://www.lamaisondelacorde.com/> (visité le 22/04/2015).
- LAH, R. et S. WEISSER. *Beganna*. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/L2274990> (visité le 24/04/2017).
- LAMARQUE, C.-H. et O. JANIN (2000). « Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities : limitations to a modal superposition ». In : *Journal of Sound and Vibration* 235, p. 567–609.
- LE CARROU, J.-L., F. GAUTIER, N. DAUCHEZ et J. GILBERT (2005). « Modelling of sympathetic string vibrations ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 91 (2), p. 277–288.
- LE CARROU, J.-L., F. GAUTIER et R. BADEAU (2009). « Sympathetic string modes in the concert harp ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 95 (4), p. 744–752.
- LE CARROU, J.-L., D. CHADEFaux, L. SEYDOUX et B. FABRE (2014). « A low-cost high-precision measurement method of string motion ». In : *Journal of Sound and Vibration* 333, p. 3881–3888.
- MABROUK, M. (1998). « A unified variational model for the dynamics of perfect unilateral constraints ». In : *European journal of mechanics. A. Solids* 17 (5), p. 819–842.
- MACHADO, M., P. MOREIRA, P. FLORES et H. M. LANKARANI (2012). « Compliant contact force models in multibody dynamics : evolution of the Hertz contact theory ». In : *Mechanism and Machine Theory* 53, p. 99–121.
- MANDAL, A. K. et P. WAHI (2015). « Natural frequencies, modeshapes and modal interactions for strings vibrating against an obstacle : relevance to Sitar and Veena ». In : *Journal of Sound and Vibration* 338, p. 42–59.
- MONTAGU, J. *double bass*. Sous la dir. d'ALISON LATHAM. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/opr/t114/e2052> (visité le 25/04/2017).
- *sitar*. Sous la dir. d'ALISON LATHAM. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/opr/t114/e6226> (visité le 26/04/2017).
- MONTAIGU, J. *shamisen*. Sous la dir. d'ALISON LATHAM. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com:80/subscriber/article/opr/t114/e6135> (visité le 24/04/2017).

- MONTEIRO MARQUES, M. D. P. (1993). *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems : shocks and dry friction*. T. 9. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser. ISBN : 978-3-0348-7616-2, 978-3-0348-7614-8.
- MONTSERRAT, P.-M. (2015). *Caractérisation du pincement de la harpe de concert en contexte musical*. Mémoire de stage de recherche, Université Pierre et Marie Curie.
- MOREAU, J.-J. (1977). « Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space ». In : *Journal of Differential Equations* 26 (3), p. 347–374.
- MOREAU, J.-J. (1988a). « Bounded variation in time ». In : *Topics in Nonsmooth Mechanics*. Sous la dir. de J.-J. MOREAU, P. D. PANAGIOTOPOULOS et G. STRANG. Birkhäuser, p. 1–74.
- (1988b). « Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics ». In : *Nonsmooth Mechanics and Applications*. Sous la dir. de J.-J. MOREAU et P. D. PANAGIOTOPOULOS. Springer Vienna, p. 1–82.
- MOUSSI, E.H., S. BELLIZZI, C. COCHELIN et I. NISTOR (2012). « Nonlinear normal modes of a two degrees of freedom oscillator with a bilateral elastic stop ». In : *18e symposium "vibrations, chocs et bruits"*.
- MUSÉE DES INSTRUMENTS DE MUSIQUE. *tampura*. URL : http://www.mim.be/fr/tampura?from_i_m=1 (visité le 20/04/2015).
- MUSEUM BASSERMANNHAUS FÜR MUSIK UND KUNST. *Museum Bassermannhaus für musik und kunst*. URL : <http://www.rem-mannheim.de/museen/museum-bassermannhaus-fuer-musik-und-kunst/> (visité le 30/10/2014).
- PAOLI, L. et M. SCHATZMAN (2002a). « A numerical scheme for impact problems I : the one-dimensional case ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40 (2), p. 702–733.
- (2002b). « A numerical scheme for impact problems II : the multidimensional case ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40 (2), p. 734–768.
- PATÉ, A. (2014). « Lutherie de la guitare électrique *solid body* : aspects mécaniques et perceptifs ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6).
- PATÉ, A., J.-L. LE CARROU et B. FABRE (2014). « Predicting the decay time of solid body electric guitar tones ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 135 (5), p. 3045–3055.
- PFEIFFER, F. et C. GLOCKER (1996). *Multibody dynamics with unilateral contacts*. Wiley VCH.
- PHILHARMONIE DE PARIS. *Collections du musée*. URL : <http://collectionsdumusee.philharmoniedeparis.fr> (visité le 06/04/2017).
- *Médiathèque*. URL : <http://mediatheque.cite-musique.fr/> (visité le 06/08/2015).
- PLEK. *Plek : the art of the fingerboard*. URL : http://www.plek.com/en_US/home/ (visité le 31/05/2017).
- RAMAN, C.V. (1921). « On some Indian stringed instruments ». In : *Indian Association for the Cultivation of Science* (7), p. 29–33.
- RANK, E. et G. KUBIN (1997). « A waveguide model for slapbass synthesis ». In : *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Munich*. T. 1, p. 443–446.
- RAO, U. *High-strung ideas*. The Hindu, article du samedi 22 janvier 2005. URL : <http://www.thehindu.com/thehindu/mp/2005/01/22/stories/2005012201420200.htm> (visité le 30/10/2014).
- RICKERBY, D. G. et N. H. MACMILLAN (1980). « On the oblique impact of a rigid sphere against a rigid-plastic solid ». In : *International journal of mechanical sciences* 22 (8), p. 491–494.
- ROSSING, T. D. (2010). *The science of string instruments*. Springer New York.
- ROY, R., A. PAULRAJ et T. KAILATH (1986). « ESPRIT - A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise ». In : *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing* 34 (5), p. 1340–1342.
- SCHATZMAN, M. (1980a). « A hyperbolic problem of second order with unilateral constraints : the vibrating string with a concave obstacle ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 73, p. 138–191.
- (1980b). « Un problème hyperbolique du 2ème ordre avec contrainte unilatérale : la corde vibrante avec obstacle ponctuel ». In : *Journal of Differential Equations* 36, p. 295–334.

- SÉGURET, C. (2015). « Fender Jazz Bass ». In : *Vintage Guitare* (21), p. 10–23.
- GROVE. *Shamisen*. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/25576> (visité le 24/04/2017).
- SHIPTON, A. *Slap-bass*. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/51117> (visité le 02/03/2017).
- SIDDIQ, S. (2012). « A physical model of the nonlinear sitar string ». In : *Archives of acoustics* 37 (1), p. 73–79.
- SIGNORINI, A. (1933). « Sopra alcune questioni di elastostatica. » In : *Atti della Societa Italiana per Il Progresso delle Scienze*.
- SINGH, P. G. (2013). « Perception and orchestration of melody, harmony and rhythm on instruments with 'chikari' strings ». In : *Meetings on Acoustics* 19.
- GROVE. *Sitar*. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/25900> (visité le 24/04/2017).
- SLATFORD, R. et A. SHIPTON. *Double bass*. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/46437> (visité le 24/04/2017).
- SMIT, T., F. TÜRKHEIM et R. MORES (2010). « A highly accurate plucking mechanism for acoustical measurements of stringed instruments ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 127 (5), EL222–EL226.
- SORRELL, N. *Sarangi*. URL : <http://www.oxfordmusiconline.com/subscriber/article/grove/music/24581> (visité le 24/04/2017).
- STUDER, C. (2009). *Numerics of unilateral contacts and friction*. T. 47. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin Heidelberg : Springer Verlag.
- TAGUTI, T. (2008). « Dynamics of simple string subject to unilateral constraint : a model analysis of sawari mechanism ». In : *Acoustical Science and Technology* 29 (3), p. 203–214.
- TAGUTI, T. et Y. TOHNAI (2001). « Acoustical analysis on the sawari tone of Chikuzen biwa ». In : *Acoustical Science and Technology* 22 (3), p. 199–207.
- THE METROPOLITAN MUSEUM OF ART. *The Collection Online*. URL : <http://www.metmuseum.org/collection/the-collection-online/> (visité le 20/04/2015).
- THORIN, A. (2013). « Non-smooth model of the grand piano action ». Thèse de doct. École polytechnique.
- THORIN, A., M. LEGRAND et S. JUNCA (2015). « Nonsmooth modal analysis : investigation of a 2-DOF spring-mass system subject to an elastic impact law ». In : *ASME. International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control*. T. 6. Boston.
- TRAUTMANN, L. et R. RABENSTEIN (2004). « Multirate simulations of string vibrations including nonlinear fret-string interactions using the functional transformation method ». In : *EURASIP Journal on Applied Signal Processing* 7, p. 949–963.
- UNIVERSITY OF SOUTH DAKOTA. *National Music Museum*. URL : <http://orgs.usd.edu/> (visité le 06/08/2015).
- VALETTE, C., C. CUESTA, C. BESNAINOU et M. CASTELLENGO (1991). « The tamera bridge as a precursive wave generator ». In : *Acustica* 74, p. 201–208.
- VALETTE, C. et C. CUESTA (1993). *Mécanique de la corde vibrante*. Hermès, Paris.
- VAN WALSTIJN, M. et V. CHATZIOANNOU (2014). « Numerical simulation of tanpura string vibrations ». In : *International Symposium on Musical Acoustics, ISMA 2014, Le Mans*.
- VAN WALSTIJN, M., J. BRIDGES et S. MEHES (2016a). « A real-time synthesis oriented tanpura model ». In : *International Conference on Digital Audio Effects, DAFx-16, Brno*.
- VAN WALSTIJN, M. et J. BRIDGES (2016b). « Simulation of distributed contact in string instruments : a modal expansion approach ». In : *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, p. 1023–1027.
- VERMOT DES ROCHES, G., O. CHIELLO, E. BALMÈS et X. LORANG (2012). « Benchmarking Signorini and exponential contact laws for an industrial train brake squeal application ». In : *International Symposium on Musical Acoustics, ISMA 2012*.

- VON HORNBOSTEL, E. M. et C. SACHS (1914). « Systematik der Musikinstrumente ». In : *Zeitschrift für Ethnologie*. T. 46. Behrend & Co, p. 553–590.
- VYASARAYANI, C. P., S. BIRKETT et J. MCPHEE (2009). « Modeling the dynamics of a vibrating string with a finite distributed unilateral constraint : Application to the sitar ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 125 (6), p. 3673–3682.
- WEISSER, S. (2006). « The Ethiopian Lyre *bagana* : an instrument for emotion ». In : *9th International Conference of Music Perception and Cognition*, p. 376–382.
- WEISSER, S. et M. DEMOUCRON (2012a). « Shaping the resonance. Sympathetic strings in Hindustani classical instruments ». In : *Meetings on Acoustics*. T. 15.
- WEISSER, S., J.-P. HERMAND et Q. REN (2012b). « The Ethiopian Lyre Bagana. An ethno-acoustical study. » In : *Journal of the Acoustical Society of America* 131, p. 3330.
- WEISSER, S. et O. LARTILLOT (2013). « Investigating non-western musical timbre : a need for joint approaches ». In : *Third International Workshop on Folk Music Analysis, Amsterdam*, p. 33–39.
- WOODHOUSE, J. (2004). « Plucked guitar transients : comparison of measurements and synthesis ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 90, p. 945–965.
- YOONG, C., A. THORIN et M. LEGRAND (2017). « Nonsmooth modal analysis of an elastic bar subject to a unilateral contact constraint ». Soumis au journal *Nonlinear dynamics*.
- YOSHIKAWA, S. (2010). « Plucked string instruments in asia ». In : *The Science of String Instruments*. Sous la dir. de T. D. ROSSING. Springer New York, p. 173–195.

Résumé

Les contacts entre une corde vibrante et un obstacle unilatéral interviennent dans de nombreux instruments de musique tels que la tampoura, le sitar ou encore la basse électrique. Ils introduisent une forte non-linéarité dans le mouvement de la corde, qui se traduit notamment par d'importants transferts d'énergie. Dans ce manuscrit, une étude à la fois numérique et expérimentale du contact corde/obstacle est proposée. Trois types de schémas conservatifs sont développés. Ils s'appuient sur une description modale de la corde, ce qui permet un ajustement des fréquences propres et amortissements pour chaque mode. De plus, deux modèles de contact et frottement sont considérés, l'un régularisant et l'autre non. Des comparaisons à la solution analytique dans le cas d'un obstacle ponctuel sont menées et permettent une première validation des modèles. Des protocoles expérimentaux sont ensuite mis en place pour l'étude d'une corde isolée en présence d'un obstacle ponctuel, puis dans le cas d'une corde installée sur une basse électrique, munie ou non de frettes. Une forte concordance des signaux expérimentaux et numériques est observée sur des temps longs, montrant la capacité des modèles à rendre compte des éléments principaux observés expérimentalement. Enfin, une étude paramétrique est conduite dans le cas d'une basse munie de frettes, montrant l'influence de paramètres tels que la position de pincement de la corde et le réglage des frettes sur le son produit. Ces ajustements sont directement liés à des problématiques récurrentes et centrales rencontrées par les musiciens et les luthiers.

Mots-clefs : Vibration de corde 3D, contact unilatéral, méthodes numériques, étude expérimentale, synthèse sonore, basse électrique

Abstract

Collisions between a vibrating string and a unilateral obstacle arise in a number of instruments such as tanpuras, sitars and electric basses. Contacts introduce a strong nonlinearity in the string motion, resulting in energy transfers. In this document, a numerical and experimental study of string/obstacle contacts is investigated. Three conservative numerical schemes are developed. They rely on a modal description of the string, so that a fine tuning of eigenfrequencies and damping parameters is possible for each mode. Moreover, contact and friction models are numerically treated either with a penalty approach or with a nonsmooth contact dynamics method. In the case of a point obstacle, comparisons to an analytical solution constitute a first validation of models. Experiments are then carried out in the case of an isolated string vibrating against a point obstacle, as well as in the case of a string vibrating against the neck of a fretted or fretless electric bass on which the string is installed. A good agreement is observed between numerical and experimental signals over long durations, showing the ability of models to take into account the essential physical features experimentally observed. Finally, a parametric study is led on a fretted electric bass, showing the influence of parameters such as the plucking position and the fretboard profile on the resulting sound. These adjustments are directly related to common and central issues met by guitar makers and players.

Keywords: 3D string vibration, unilateral contact, numerical methods, experimental study, sound synthesis, electric bass